AL
TY

# MEMOIRS

OF THE

# COLLEGE OF SCIENCE

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY

SERIES A

VOL. XXI, NO. 5

SEPTEMBER 1938

KYOTO

# Strahlungstheoretische Untersuchungen über die Stellargashülle in Bewegung.

Von Michinori Kurihara

(Eingegangen am 1, Juni 1938)

## Einleitung.

In Verbindung mit den Beobachtungen von Stellarspektrallinien ist heute von vielen Forschern die Ansicht geäussert worden, dass die der Sonnenchromosphäre entsprechenden Schichten bei den Sternen von hoher Temperatur, insbesondere ausgezeichnet, falls sie Emissionslinien zeigen, in aussergewöhnlich grossen Dimension entwickelt sind, und dass sich solche Atmosphären im allgemeinen im Bewegungszustande befinden.[1] Wenn man sich also mit solchen Himmelskörpern beschäftigen will, scheint es sehr wichtig zu sein, vor allem die Strahlungstheorie in einer bewegenden Sternatmosphäre so allgemein wie möglich zu entwickeln.

Das Problem lässt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen; der eine besteht in den Wechselwirkungen der Materie mit dem Strahlungsfeld, nämlich den Vorgängen wie Ionisationen, Emissionen und Absorptionen, und der andere in den Verteilung von Dichte sowie Geschwindigkeit in der Gashülle. Diese beiden Probleme legen sich immer in Verbindung miteinander vor, so dass sie, streng genommen, auf einmal gelöst werden müssen. Aber wir wollen in dieser Abhandlung, wie es gewöhnlich in der Praxis getan wird, sie getrennt und zwar ausschliesslich das erstere betrachten, das wir vorläufig „*Strahlungsproblem*" nennen möchten.

Die bisherigen Untersuchungen, H. von Zanstra[2] und B. P. Gerasimovič[3] abgesehen, haben meistens das Strahlungsproblem der statischen Gashülle behandelt. Es handelt sich hier darum, die allgemeine Strahlungstheorie der bewegenden Gashülle zu entwickeln, deren Geschwindigkeitsverteilung als bekannt angenommen ist. Die folgenden drei Gedanken liegen unserer Untersuchung zugrunde.

(1) *Die Rekombinationshypothese.* Was den Ursprung der Emis-

1. S. Rosseland, Theoretical Astrophysics (1936), 284.
2. M. N. **95** (1934) 84; ibid. **97** (1936) 37.
3. M. N. **94** (1934) 737.

sionslinien betrifft, ist ein Mechanismus zuerst von Zanstra[1] vorgeschlagen worden, nämlich der sogenannte Rekombinationsmechanismus; er lautet folgendermassen :— das normale Wasserstoffatom werde nur durch die vom Zentralstern kommenden „ Ultraviolettstrahlungen " ionisiert, die man als ausserhalb der Lymangrenze liegenden verstehen muss. Das dabei befreite Elektron werde, irgendeinem Ion begegnend, in ein gewisses Energieniveau dieses Ions wieder eingefangen und steige dann stufenweise bis zum Grundzustand herab. Auf diese Weise verwandeln sich Ultraviolettstrahlungen in monochromatische Strahlungen mit den Eigenfrequenzen vom Wasserstoffatom. Wenn die Materie, wie bei den planetarischen Nebeln, so dünn ist, dass die Anzahl der Atome in den zweiten und höheren Zuständen sehr wenig sind, so ist die Gashülle gegen die Balmer- und Paschenlinien u. s. w. transparent, und infolgedessen ist die Gesamtquantenzahl der Ultraviolettabsorption gleich zu der der $L_\alpha$-Emissionen und der kontinuierlichen Emissionen an der Lymangrenze und die Gesamtquantenzahl der $L_\alpha$-Emissionen ist gleich der der Balmeremissionen, denn die Opazität der Gashülle ist ziemlich gross für die Lymanlinien.

Diese Verhältnisse hat Zanstra benutzt, um die Temperatur der anregenden Sterne ($B_1$, $B_0$ und $O$) der Nebel abzuschätzen; seine Ergebnisse stehen mit den anderweitig—z. B. ionisationstheoretisch—bestimmten in guter Übereinstimmung. Seitdem ist es für plausibel gehalten worden, dass die Emissionslinien im Spektrum vom *Be* Typus durch die Rekombinationsmechanismen in einer diffusen Gashülle verursacht werden.[2] Das ist die „ *Rekombinationshypothese.*"

(2) *Die Relativintensitäten der Balmeremissionen.* Diese können aus den Beobachtungen verhältnismässig leicht bestimmt werden. Die Werte sind natürlich verschieden für verschiedene Gegenstände. Im früheren Stadium der theoretischen Betrachtung genügte man sich, ihre durchschnittlichen Werte theoretisch zu bestimmen; in der Tat gelang es G. Cillié,[3] indem er von der Rekombinationshypothese ausging.

Bei den planetarischen Nebeln sind die Gashülle, wie in (1) erwähnt, für alle Spektrallinien transparent, abgesehen von den Lymanlinien, deren aussergewöhnlich grosse Opazität in der Rekombinationshypothese eine wichtige Rolle spielt. Dann müssen die spontanen Übergänge vom $i$-Zustand einerseits (der Übergang zum Grundzustand ist ausschliessen)

1. Ap. J. **65** (1927) 50; Z. f. Ap. **2** (1930) 1; Publ. Dom. Ast. Obs. **4** (1931) 209.
2. C. f. Rosseland, Ap. J. **63** (1926) 218.
3. M. N. **92** (1932) 820; **96** (1936) 771.

und die Einfänge der freien Elektronen plus die spontanen Übergänge in denselben Zustand anderseits in Gesamtzahl zueinander gleich sein. Solche Gleichungen werden gewöhnlich die „Zyklusgleichungen" genannt.

Aus den Zyklusgleichungen hat Cillié die Relativintensitäten der Balmerlinien numerisch berechnet; sein Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungen in Grössenordnung überein, nicht nur bei den planetarische Nebeln sondern auch bei den *Be*-Sternen, was die Rekombinationshypothese desto plausibeler macht.

(3) *Transport der Strahlungsenergie und Optische Umgebung.* Die obigen Untersuchungen von Zanstra und von Cillié beziehen sich hauptsächlich auf den Emissionsmechanismus. Dem Strahlungsproblem gehört aber auch eine andere wichtige Erscheinung, nämlich der Transport der Strahlungsenergie in der Gashülle an. Der Verdünnungsfaktor ist bei den *Be*-Sternen im allgemeinen nicht immer so gross, dass die Durchsichtigkeit der Gashülle für die Linien der Balmer- sowie der höheren Serien als vollständig gilt. Man muss daher in den Zyklusgleichungen nicht nur die spontanen Übergänge sondern auch die Absorptionsübergänge in Betracht ziehen, und dazu hat man das Problem des Energietransportes dieser Strahlungen zu lösen; solche verallgemeinerte Zyklusgleichungen darf man für die Formulierung der Rekombinationstheorie im weiteren Sinne halten.

Über den Transport der Strahlungsenergie bei den parallelen ebenen Gasschichten sind viele Untersuchungen gemacht worden, z. B. von E. A. Milne,[1] V. A. Ambarzumian,[2] S. Chandrasekhar,[3] B. P. Gerasimović[4] u. a. Sie beziehen sich jedoch hauptsächlich nur auf die Ultraviolett- und die $L_\alpha$-Strahlung; sie dürfen insbesondere auf die *Be*-Sterne nicht angewendet werden, weil sie den Einfluss des Doppler-Effektes auf die Strahlungsfelder ausser acht gelassen haben. In der Tat spielt der Doppler-Effekt wegen der verschiedenen relativen Bewegungszustände innerhalb der Gashülle eine grosse Rolle, indem er die Atome in einem Punkte gegen die von den entfernten Punkten herkommenden Eigenstrahlungen unwirksam macht. Um diese Verhältnisse zum Ausdruck zu bringen, denken wir an „*optisch effektive Umgebung*" um einen Punkte in der Gashülle.

---

1. Z. f. Ap. **1** (1930) 98.
2. M. N. **93** (1932) 50.
3. Z. f. Ap. **9** (1935) 267.
4. *loc. cit.*

Dieser Begriff ist nichts neues, z. B. haben J. Woltjer,[1] W. H. McCrea und K. K. Mitra,[2] Zanstra[3] u. s. w. gelegentlich ihrer Untersuchungen der Sonnenchromosphäre oder der Nebel davon Gebrauch gemacht; wir werden ihn später genauer definieren. Insgesamt bei unserem Strahlungsproblem reicht es aus, den Energietransport und den Emissionsmechanismus nur in solcher optischer Umgebung zu betrachten.

Neuerdings haben Prof. T. Araki und der Verfasser bei der Konturberechnung der Emissionslinien der expandierenden Gashülle eines Sternes[4] solchen Transport der Strahlungsenergie in allgemeintheoretischer Weise manipuliert. Es ist nicht schwer diese Theorie für eine Gashülle in allgemeinerem Bewegungszustande zu erweitern und damit die verallgemeinerten Zyklusgleichungen abzuleiten. Es sollen im ersten Teil dieser Abhandlung die Verallgemeinerung der früheren Arbeit und einige Überlegungen betreffs optischer Umgebung gemacht worden. Es handelt sich im zweiten Teil um die Zyklusgleichungen, und schliesslich besteht der dritte Teil in einigen numerischen Betrachtungen über die Verteilung der Atome in Energieniveaus, und die Relativintensitäten der Balmeremissionen von *Be*-Sternen u. s. w.

## I. Transport der Strahlungsenergie.

§ 1. *Optische Umgebung.* Es handelt sich in diesem Teil hauptsächlich um die Verallgemeinerung der in der früheren Abhandlung A entwickelten Theorie;— wir können also nicht umhin, auch einige im vollkommen Kontexte unentbehrliche Begriffe oder Formulierungen wieder ab initio zu erklären, freilich aber in etwas verbesserter Form.

Wir fassen ein Atomaggregat in irgendeinem Punkte (sei P) in der sich bewegenden Gaswolke ins Auge, und nehmen dabei die darauf wirkende Strahlung als monochromatisch und zwar von lauter einer bestimmten Frequenz an. Die Strahlung, die von irgendeinem anderen Punkte P′ aus emittiert wird und zu P gelangt, kann nur dann Einfluss auf die Atome in P ausüben, wenn P′ so nahe an P liegt, dass die nach der relativen Geschwindigkeit zwischen P, P′ verschobene Wellenlänge in die effektive Breite der betreffenden Spektrallinie fällt. Daher kommt man auf den Gedanken von einer sozusagen „optisch

1. Bull. Ast. Inst. Netherlands, **7** (1934) 217.
2. Z. f. Ap. **11** (1936) 359.
3. *loc. cit.*
4. Z. f. Ap. **13** (1937) 89.

effektiven " Umgebung des Atomaggregats um den Punkt P, dessen Ausdehnung nicht nur von der Geschwindigkeitsverteilung in der Gashülle und der effektiven Breite der Linie, sondern auch von der Fortpflanzungsrichtung der Strahlung abhängt. Unter solcher Umgebung wollen wir „ *Optische Umgebung* " um den betrachteten Punkt verstehen.[1]

Es soll in den folgenden Abschnitten die Vorstellung der optische Umgebung nach der Nomenklatur und Angriffsmethode in A formuliert werden; dabei lassen wir die Wechselwirkungen der benachbarten Linien als vernachlässigbar ausser acht; wir nehmen nämlich an, dass man eine Strahlung von der Frequenz, die für einen Übergang von einem Zustande $(j)$ in einen anderen $(i)$ eines Atoms entspricht, unabhängig von allen übrigen Linien behandeln kann. Man bezeichne diese Frequenz mit $\nu_{ij}$, oder mit $\nu_0$, wenn es klar ist.

Unter *P-System* verstehen wir das sich mit dem Atomaggregate in P bewegende Koordinatensystem und man bezeichne mit $\nu$ die Frequenz einer Strahlung in bezug auf P-System. Es sei $n_i(\zeta)\, d\zeta$ die Zahl pro Volumeneinheit derjenigen im $i$-Zustande befindlichen Atome, von denen aus gesehen die $\nu$-Strahlung als die der Frequenz $\nu_0$ erscheint, wobei $\zeta$ eine durch

$$\nu-\nu_0=\nu_0\zeta \quad \text{oder} \quad \nu=\nu_0(1+\zeta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

zu definierende dimensionslose Grösse ist.

Die Gesamtzahl pro Volumeneinheit der Atome im $i$-Zustande ist

$$n_i=\int n_i(\zeta)d\zeta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.2)$$

Der Bruchteil $n_i(\zeta)/n_i$ hängt nicht von der Eigenfrequenz des Atoms sondern vielmehr von dem Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der regellosen atomaren oder turbulenzartigen Bewegungen im Innern des P-systems ab, denn die Spektrallinie wird hauptsächlich durch solche Bewegungen flügelförmig verbreitet. Man kann demnach setzen

$$n_i(\zeta)=n_i\Delta(\zeta), \qquad \int\Delta(\zeta)d\zeta=1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.3)$$

unabhängig von $\nu_{ij}$.

§ 2. Die in A definierten Absorptions- und Emissionskoeffizienten $(\alpha(\nu), \beta(\nu))$ können durch die in der Physik üblichen atomaren Konstanten ausgedrückt werden.

$n$ sei die Gesamtzahl der Wasserstoffatome in Volumeneinheit, unter

1. Diese Definition muss man, streng genommen, für die hereinkommende und die herausgehende Strahlung verschieden betrachten. Vgl. § 4.

denen $n_0$ Atome ionisiert seien. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die Wahrscheinlichkeit des spontanen Übergangs $j \to i$ mit $A_{ji}(j>i)$ und die des Übergangs $i \to j$ mit $B_{ij}I(\nu_{ij})$, wobei $I(\nu_{ij})$ die spezifische Intensität bedeutet, so hat man

$$A_{ji}=\frac{q_i}{q_j}\sigma_{ij}B_{ij} \quad \text{wo} \quad \sigma_{ij}\equiv\frac{2h\nu^3_{ij}}{c^2} \cdot \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

ist und $q_i$, $q_j$ die Gewichte der entsprechenden Zustände sind.

Der atomare Absorptionskoeffizient $\alpha_{ij}(\nu)$ wird bekannterweise gegeben durch

$$\alpha_{ij}(\nu)=\frac{n_i(\zeta)d\zeta B_{ij}I(\nu_{ij})h\nu_{ij}}{n4\pi I(\nu_{ij})\nu_{ij}d\zeta},$$

daher folgt nach (1.3)

$$\alpha_{ij}(\nu)=\bar{\alpha}_{ij}\Delta(\zeta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

wo man setzt:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\alpha}_{ij}=\frac{B_{ij}h}{4\pi}\cdot\frac{n_i}{n}, \\ \text{oder}\quad &\bar{\alpha}_{ij}=\frac{A_{ji}}{c\tilde{\omega}_{ji}}\cdot\frac{n_i}{n}, \quad \tilde{\omega}_{ji}\equiv\frac{q_i}{q_j}\frac{4\pi}{ch}\sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \cdot \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

Von dem letzteren Ausdrück von $\bar{\alpha}_{ij}$ werden wir später Gebrauch machen.

Wir betrachten zunächst den atomaren Emissionskoeffizienten $\beta_{ji}(\nu)$, der als die mittleren Emissionen pro Atom pro Einheitsfrequenz definiert wird. Bezeichnet man mit $B_{ji}$ den Koeffizienten des erzwungenen Emissionsübergangs, so gibt es dann zwischen $B_{ij}$ und $B_{ji}$ eine bekannte Relation:

$$q_jB_{ji}=q_iB_{ij}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4)$$

Bezeichnet man weiter mit $B(\nu_{ij})$ die Gesamtemission pro Einheitsvolumen, so kann man leicht finden

$$B(\nu_{ij})=\int n\beta_{ji}(\nu)d\nu=\int A_{ji}n_i(\zeta)h\nu_{ij}d\zeta+\iint\frac{I(\nu)B_{ji}}{4\pi}\cdot n_j(\zeta)h\nu_{ij}d\zeta d\omega$$

daraus erhält man nach (1.3), (2.3), (2.4)

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{ji}(\nu)=\bar{\beta}_{ji}\Delta(\zeta) \\ &\bar{\beta}_{ji}=A_{ji}h\frac{n_j}{n}+\frac{n_j}{n_i}\frac{q_i}{q_j}\iint I(\nu)\bar{\alpha}_{ij}\Delta(\zeta)d\zeta d\omega \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(2.5)$$

$$B(\nu_{ij})=\bar{\beta}_{ji}n\nu_{ij}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

Die erzwungenen Emissionsübergänge, die gegenüber den spontanen Übergängen vernachlässigt zu werden pflegen, finden bei so hoher Temperatur wie bei den Atmosphären der *Be*-Sterne ziemlich häufig statt, so dass wir der Allgemeinheit halber das ihnen entsprechende Glied in (2.5) hier noch beibehalten.

§ 3. *$\mu$-Strahlung und P-Strahlung.* Indem wir in A die von uns direkt zu beobachtende Frequenz mit $\mu$ bezeichnet haben, um sie von der im P-System gemessenen $\nu$ deutlich zu unterscheiden, haben wir eine nach Beobachter fortpflanzende Strahlung von Frequenz $\mu$ kurz „*$\mu$-Strahlung*" genannt und denjenigen Punkt in der Gashülle, in dessen P-System die Frequenz der $\mu$-Strahlung eben $\nu_0$ beträgt, als „*Effektives Zentrum für eine $\mu$-Strahlung*" oder einfach „*$\mu$-Zentrum*" definiert.

Nun fassen wir, den Gesichtpunkt umtauschend, ein P-System in irgendeinem Punkt P ins Auge und wenn die Frequenz einer Strahlung von ihm aus gesehen gerade als $\nu_0$ erscheint, so nennen wir sie „*P-Strahlung für einen P-System*" oder einfacher „*P-Strahlung.*" Es lässt sich eine P-Strahlung dann und nur dann immer für eine $\mu$-Strahlung halten, wenn ihre Fortpflanzungsrichtung eben eine Visionslinie ist, der P-Punkt ist dabei natürlich das $\mu$-Zentrum für die betreffende $\mu$-Strahlung.

§ 4. *Optische Länge.* Es seien $\tau_{\overleftarrow{\nu(P)}}(PX)$ und $\tau_{\overrightarrow{\nu(P)}}(PX)$ die optische Länge zwischen zwei Punkten P, X für die $\nu(P)$-Strahlung in Richtung $\overrightarrow{XP}$ bzw. $\overrightarrow{PX}$. Wir haben dann definitionsgemäss:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\overleftarrow{\nu(P)}}(PX)&=\int_P^X \alpha(\overleftarrow{\nu(X)})n(X)d\overline{PX}\\ \tau_{\overrightarrow{\nu(P)}}(PX)&=\int_P^X \alpha(\overrightarrow{\nu(X)})n(X)d\overline{PX}\end{aligned}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.1)$$

Wenn insbesondere $\overleftarrow{\nu(P)}$ oder $\overrightarrow{\nu(P)}$ der Eigenfrequenz $\nu_0$ gleich ist, nämlich, wenn man eine P-Strahlung ins Auge fasst, soll für sie einfach $\tau(\overleftarrow{PX})$ und $\tau(\overrightarrow{PX})$ geschrieben werden. Wenn man den Punkt X allmählich von P entfernt, so wird das Atom im X dementsprechend immer unwirksamer für die P-Strahlung. Indem man also $\underset{\overline{XP}\to\infty}{Lim}\tau(\overleftarrow{PX})=\tau^-(P)$, $\underset{\overline{XP}\to\infty}{Lim}\tau(\overrightarrow{PX})=\tau^+(P)$ setzt, so könnten $\tau^-(P)$ und $\tau^+(P)$ gewissermassen die Ausdehnung in Richtung $\overrightarrow{XP}$ bzw. $\overrightarrow{PX}$ der Umgebung in bezug auf die P-Strahlung charakterisieren. Sie können deshalb als die Grösse der Umgebung für die hereinkommenden bzw. herausgehenden P-Strahlungen gelten. Um eine symmetrische Umgebung eindeutig definieren zu können, wählen wir die optisch Gesamtlänge einer Linie entlang, d. h. $\tau(P)=\tau^-(P)+\tau^+(P)$, die, wie in § 6 gesehen wird, für die Strahlungen in entgegengesetzten Richtungen denselben Wert besitzt, als das Mass für die Umgebungsausdehnung in der Richtung der betrachteten Linie; wir möchten solche Umgebung „*Optische Gesamt-*

*umgebung*" oder kurz „*Umgebung*" nennen. Diese Umgebung spielt ja eine wichtige Rolle in unserer Theorie.

§ 5. *ζ-Expansion der Ortfunktionen.* Wir haben bei der Betrachtung der radial expandierenden Gashülle eines Sternes in A drei Voraussetzungen gemacht. Bei allgemeinem Bewegungszustande muss man jedoch die dort angenommene Kugelsymmetrie weglassen. Man nehme also hier de novo folgendermassen an:

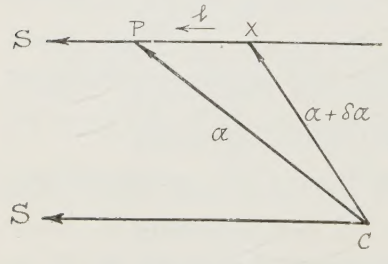
a) Die Geschwindigkeit der regellosen (atomare oder turbulenzartigen) Bewegungen im Inneren des P-Systems ist klein im Vergleich mit der des P-Systems selbst, so dass man das Quadrat und höhere Potenzen des Verhältnisses dieser beiden Geschwindigkeiten mit hinreichender Näherung vernachlässigen darf.

b) Die Geschwindigkeit des P-Systems ist ganz klein in der Grössenordnung gegen die Lichtgeschwindigkeit.

c) Es gibt immer nur ein effektives Zentrum auf einer Visionslinie für eine $\mu$-Strahlung.

Die ersten beiden zusammen bedeuten wesentlich, dass die relativen Bewegungen von P-Systemen, trotz der Trivialität ihrer unmittelbaren Einwirkungen auf die Frequenz, Richtung, Energie u. s. w. der Strahlung, doch den Absorptions- sowie den Emissionskoeffizienten mittelbar durch die Funktion $\Delta(\zeta)$ ziemlich beträchtlich zu beeinflussen vermögen. Die Annahme c) ist dagegen nur darum gemacht, dass man die Formulierung des Problems vereinfachen kann.

Abb. 1




Eine Ortfunktion lässt sich im allgemeinen in eine Potenzreihe des Abstandes $s$ von einem bestimmten Punkte entwickeln, aber sie soll hier durch eine Potenzreihe von $\zeta$ anstatt $s$ entwickelt werden.

In Abb. 1 wähle man als den Ursprung des Koordinatensystems etwa das Sternzentrum C, und $\mathfrak{a}$ sei der Radiusvektor des betrachteten Punktes P. Es sei $\overrightarrow{PS}$ eine Richtung (1) und $X(\mathfrak{a}+\delta\mathfrak{a})$ sei irgendein Punkt auf $\overline{PS}$, dessen X-System sich mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewege. Bezeichnet man nun mit $\nu$ die im X-System gemessene Frequenz der in $\overrightarrow{PS}$ fortpflanzenden P-Strahlung, so lautet das *Doppler*sche Prinzip wegen (1.1)

$$\zeta=\frac{1\cdot\mathfrak{v}(P)-1\cdot\mathfrak{v}(X)}{c}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.1)$$

Bezeichnet man weiter mit $\nabla$ den *Hamilton*schen Operator bei der festgehaltenen Strahlrichtung, so wird eine Ortfunktion $F$ nach der *Taylor*schen Entwicklung gegeben durch

$$F(X)=F(P)+\delta a(\mathfrak{l}\cdot\nabla F+\frac{\delta a^2}{2!}(\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla F)$$
$$+\frac{\delta a^3}{3!}\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla F))+\cdots\cdots\cdots. \qquad \cdots\cdots(5.2)$$

Die Grösse $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v})$ in der rechten Seite von (5.1) wird als eine Ortfunktion angesehen, weil man hier eine bestimmte Richtung d. h. $\mathfrak{l}$ ins Auge fasst. Wenn man also in (5.2) $F=\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v}$ einführt und

$$\overleftarrow{PX}=s\mathfrak{l} \quad \text{oder} \quad \delta a=-s \qquad \cdots\cdots(5.3)$$

setzt, so ergibt (5.1)

$$\left.\begin{aligned}\zeta=-s\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s}\right)_P+\frac{s^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}\right)_P+\frac{s^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial s^3}\right)_P+\cdots\cdots\\ \text{mit}\quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial s}\right)_P=\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v})}{c},\quad \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}\right)_P=-\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v}))}{c},\\ \left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial s^3}\right)_P=\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v})))}{c}\end{aligned}\right\}. \qquad \cdots\cdots(5.4)$$

Oder umgekehrt, wegen $s=0$ für $\zeta=0$,

$$s=\frac{c}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\zeta+\frac{c^2}{2}\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})^3}\zeta^2+(\text{gerade Funktion von }\mathfrak{l})$$
$$\times\left(\frac{c\zeta}{v}\right)^3+\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots(5.5)$$

daraus folgt durch Differentiation

$$ds=\frac{c}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\left\{1+\frac{c\mathfrak{l}\cdot\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})^2}\zeta+(\text{gerade Funktion von }\mathfrak{l})\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{c\zeta}{v}\right)^2+\cdots\cdots\right\}\cdot d\zeta, \qquad \cdots\cdots(5.6)$$

wobei zu setzen ist:

$$\mathfrak{f}=\nabla(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{v}). \qquad \cdots\cdots(5.7)$$

(5.2) wird dann nach (5.3) und (5.5)

$$F(X)=F(P)-\frac{c\mathfrak{l}\cdot\nabla F}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\zeta+\frac{c^2}{2!}\cdot\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla\left(\frac{\mathfrak{l}\cdot\nabla F}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f}}\right)}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\zeta^2+\cdots\cdots.$$
$$\cdots\cdots(5.8)$$

In der rechten Seite von (5.6) und (5.8) sind die Verhältnisse der Glieder von $\zeta^2$ zu den konstanten gleich $(c\zeta/v)^2$ in der Grössenordnung. Da aber solche Funktion immer mit dem Faktor $\Delta(\zeta)$ auftritt, der nur

innerhalb eines ganz kleinen—entsprechend der regellosen Bewegungen der Atome—Bereiches von Null verschieden ist, kann man von zweiten und höheren Grössenordnungen wegen der Annahme a) absehen. Es ist aber auch zu bemerken, dass das $\zeta^2$-Glied immer gerade Male durch $\mathfrak{l}$ multipliziert ist. Auf diese Weise erhält man schliesslich

$$ds=\frac{c}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\left\{1+\frac{c\mathfrak{l}\cdot\Gamma(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})^2}\zeta\right\}\cdot d\zeta, \qquad \text{.....(5.9)}$$

$$F(X)=F(P)-\frac{c\mathfrak{l}\cdot\Gamma F}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}\zeta. \qquad \text{.....(5.10)}$$

§ 6. Wir können nun nach der $\zeta$-Expansion die optische Länge zwischen P und X für eine P-Strahlung in der Richtung $\mathfrak{l}$ durch die auf den Punkt P bezogene Quantitäten ausdrücken, wendet man nämlich (5.10) auf $F=n\bar{a}$ an, so erhält man nach (2.2), (3.1), (5.9)

$$\tau(\overleftarrow{PX})=\tau(P)\Phi^0(\zeta)-\sigma(P)\Phi^1(\zeta), \qquad \text{.....(6.1)}$$

wobei gesetzt sind

$$\tau(P)\equiv\left(\frac{n\bar{a}}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f}}\right)_P,\quad \sigma(P)\equiv\left(\frac{c^2}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f}}\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{n\bar{a}}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f}}\right)\right)_P, \qquad \text{.....(6.2)}$$

$$\Phi^0(\zeta)\equiv\int_0^\zeta J(\zeta)d\zeta,\qquad \Phi^1(\zeta)\equiv\int_0^\zeta\zeta J(\zeta)d\zeta\,; \qquad \text{.....(6.3)}$$

insbesondere für $\zeta=\pm\infty$, wegen (1.3),

$$\left.\begin{aligned}&\Phi^0(+\infty)=-\Phi^0(-\infty)=\frac{1}{2}\\&\Phi^1(+\infty)=\Phi^1(-\infty)\quad\left(\text{sei}=\frac{\Delta}{2}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad \text{.....(6.4)}$$

Dabei bedeutet $c\Delta$ die mittlere halbe Breite der betrachteten Linie, ausgedrückt in der Geschwindigkeit.[1]

Wir wollen uns im folgenden nur auf den Fall beschränken, wo $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})>0$ ist.[2] Indem man also in (6.1) einmal $\zeta$ nach $+\infty$, das andere Mal nach $-\infty$ streben lässt und das Vorzeichen ändert, so erhält man wegen (6.4) für $\tau^-(P)$ bzw. $\tau^+(P)$

---

1. Wenn man annimmt, dass die Spektrallinie hauptsächlich durch die regellosen Bewegungen der Atomen verbreitert wird, deren Geschwindigkeitsverteilung in einer beliebigen Richtung ein Gesetz $dn=nf(u)du$ befolgt, so ist $\Delta(\zeta)=cf(u)$, wegen (1.3). Dann ergibt sich nach (6.3), (6.4) $\Delta=2c\int_0^\infty\zeta f(u)d\zeta$, was definitionsgemäss nichts anders als die mittlere halbe Breite ist.

2. Falls $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})<0$, ist $|\tau(P)|$ anstatt $\tau(P)$ in (6.5) und (6.6) einzusetzen.

$$\left.\begin{aligned}\tau^-(P)&=\frac{1}{2}\tau(P)-\frac{J}{2}\sigma(P)\\ \tau^+(P)&=\frac{1}{2}\tau(P)+\frac{J}{2}\sigma(P)\end{aligned}\right\}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.5)$$

woraus nach (6.2)

$$\tau(P)=\tau^-(P)+\tau^+(P)=\frac{c\bar{a}n}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.6)$$

folgt, was zeigt, dass die Grösse $\tau(P)$ die längs einer P-Strahlung gemessene optische Gesamtlänge ist, die zur Absorption dieser Strahlung effektiv beizutragen vermag, und zwar, dass sie für die entgegengesetzten Richtungen denselben Wert hat.

§ 7. *Quadratische Gleichung für die Grenzfläche der optischen Umgebung.* Wir wollen nun etwas eingehend die Gestalt der in § 3 definierten optischen Umgebung betrachten, deren Ausdehnung durch (6.6) gegeben ist.

Man konstruiere zu diesem Zweck eine durch denjenigen Radiusvektor, jeweils parallel zu dem der betrachteten Umgebung, zu erzeugende Fläche, dessen Betrag $r$ jedoch zu der Quadratwurzel der optischen Gesamtlänge in der betreffenden Richtung, l, proportional ist, nämlich, wegen (6,6):

$$r\mathfrak{l}=\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})^{-\frac{1}{2}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.1)$$

Bezeichnet man mit $(l, m, n)$ die Direktionskosinus von Richtung l, so lautet Gleichung (5.7)

$$\mathfrak{f}=l\mathfrak{f}_x+m\mathfrak{f}_y+n\mathfrak{f}_z, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.2)$$

wobei

$$\mathfrak{f}_x=\mathrm{grad}v_x,\ \mathfrak{f}_y=\mathrm{grad}v_y,\ \mathfrak{f}_z=\mathrm{grad}v_z. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.3)$$

Setzt man der Einfachheit halber

$$S_{xx}=\frac{\partial v_x}{\partial x},\ \text{u.s.w.},\quad 2S_{xy}=\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y},\ \text{u.s.w.},$$

$$2W_{xy}=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y},\ \text{u.s.w.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.4)$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S}_x&=\mathfrak{i}_0\cdot S_{xx}+\mathfrak{j}_0\cdot S_{yx}+\mathfrak{k}_0\cdot S_{zx}\\ \mathfrak{S}_y&=\mathfrak{i}_0\cdot S_{xy}+\mathfrak{j}_0\cdot S_{yy}+\mathfrak{k}_0\cdot S_{zy}\\ \mathfrak{S}_z&=\mathfrak{i}_0\cdot S_{xz}+\mathfrak{j}_0\cdot S_{yz}+\mathfrak{k}_0\cdot S_{zz}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}\mathfrak{W}_x&=\mathfrak{j}_0 W_{yx}+\mathfrak{k}_0 W_{zx}\\ \mathfrak{W}_y&=\mathfrak{i}_0 W_{xy}+\mathfrak{k}_0 W_{zy}\\ \mathfrak{W}_z&=\mathfrak{i}_0 W_{xz}+\mathfrak{j}_0 W_{yz}\end{aligned}\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.5)$$

$$\mathfrak{S}=l\mathfrak{S}_x+m\mathfrak{S}_y+n\mathfrak{S}_z,\quad \mathfrak{W}=l\mathfrak{W}_x+m\mathfrak{W}_y+n\mathfrak{W}_z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.6)$$

wo $\mathfrak{i}_0$, $\mathfrak{j}_0$, $\mathfrak{k}_0$ die Einheitsvektoren sind, so wird (7.2) wegen (7.3)

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{S}+\mathfrak{W}, \qquad \ldots\ldots(7.7)$$

wobei $\mathfrak{S}$ ein symmetrischer und $\mathfrak{W}$ ein schiefsymmetrischer Tensor ist.

Wenn man (7.7) mit $\mathfrak{l}$ multipliziert, so ergibt sich nach eine Relation $\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{W}=0$

$$\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k}=\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{S}=(\mathfrak{i}_0\cdot\mathfrak{l})(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{S}_x)+(\mathfrak{j}_0\cdot\mathfrak{l})(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{S}_y)+(\mathfrak{k}_0\cdot\mathfrak{l})(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{S}_z). \qquad \ldots\ldots(7.8)$$

Indem man die beiden Seite von (7.1) auf das Quadrat erhöht, erhält man schliesslich nach (7.5), (7.8)

$$\sum x^2 S_{xx}+2\sum xy S_{xy}=1, \qquad \ldots\ldots(7.9)^1$$

was nichts anders als die gesuchte Quadratische Gleichung für die Grenzfläche der optischen Umgebung ist.[2]

Die Hauptachsentransformation von (7.9) gibt nun einfach:

$$S_{xx}x^2+S_{yy}y^2+S_{zz}z^2=1, \qquad \ldots\ldots(7.9a)$$

dann ist man imstande, den mittleren Wert von $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})$ für die P-Strahlungen in allen Richtungen zu berechnen. Man erhält in der Tat aus (7.1) und (7.9a)

$$(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})=l^2S_{xx}+m^2S_{yy}+n^2S_{zz}, \qquad \ldots\ldots(7.10)$$

unabhängig von der Beschränkung $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})>0$. Indem man es über den Raumwinkel $\omega$ integriert, so erhält man unter Benutzung von Polarkoordinaten

$$\int(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})d\omega=\frac{4\pi}{3}(S_{xx}+S_{yy}+S_{zz});$$

---

1. Bei der Ableitung dieser Gleichung haben wir $(\mathfrak{l}\mathfrak{k})>0$ angenommen; falls ein Teil der Fläche imaginär wird, muss man anstatt dessen den reellen Ausdruck einsetzen, der durch die Vertauschung des Vorzeichens der rechten Seite von (7.9) erhalten wird.

2. Bei der reinen gleichmässigen Rotation verschwindet der symmetrische Tensor $\mathfrak{S}$, so dass die optische Umgebung unendlich gross wird. Dies wird auch davon leicht gesehen, dass einem Beobachter in dem rotierenden System die Gashülle als Ganzes ruhig erscheinen müsse. Aber bei der radial expandierenden Gashülle lautet (7.9)

$$\frac{dv}{dr}x^2+\frac{v}{r}y^2+\frac{v}{r}z^2=1,$$

wobei die $x$- Achse radial gerichtet ist. Wenn man sowohl die Expansion als auch die Rotation, deren Winkelgeschwindigkeit nur von $r$ abhängt, betrachtet, so erhält man

$$\frac{dv}{dr}x^2+\frac{v}{r}y^2+\frac{v}{r}z^2+r\frac{d\omega}{dr}\sin\theta\cdot xz=1,$$

wobei die $x$- und die $y$-Achse Richtungen von $r$ bzw. $\theta$ entsprechen.

Die obigen Beispiele zeigen, dass die Grenzfläche der Umgebung im allgemeinen keine Sphäre ist. Die Intensität der herausgehenden P-Strahlung hängt also von ihrer Richtung ab und zwar um so beträchtlicher, je grösser die optische Gesamtlänge der Umgebung ist. Es folgt auch hieraus z. B., dass die relativen Intensitäten der Balmeremissionen ihre Änderungen nach Richtung mehr der Form der Umgebung verdankt als der der Gashülle. Dies wird vielleicht die Spektraländerung bei einigen Sternen, insbesondere bei β-Lyrae, erläutern können.

die rechte Seite ist hier wegen (7.4) zu $\frac{4\pi}{3}\mathrm{div}\mathfrak{v}$ gleich, also in dem allgemeineren Koordinatensystem

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})d\omega=\frac{1}{3}\mathrm{div}\mathfrak{v}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.11)$$

§ 8. *Intensität der μ-Emission.* Die Kontur der Spektrallinien wird durch die Integration der $\mu$-Strahlung über die Locusfläche der $\mu$-Zentrum ermittelt. Solche Berechnung und ihre Resultate sind in A erschöpfend erörtert worden. Hier wollen wir uns also nur die Intensität der $\mu$-Strahlung bei der allgemeinen Bewegungen berechnen.

Es sei M ein $\mu$-Zentrum und $P_0$ sei ein beliebiger Punkt, der sich auf der M passierenden Visionslinie befindet. Die Intensität der $\mu$-Strahlung $I_\mu(P_0)$ wird dann durch

$$I_\mu(P_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{P_0}^{\infty}n(P)\bar{\beta}(P)\Delta(\zeta)e^{-\tau_\mu(P_0P)}\,d\overline{P_0P} \qquad \ldots\ldots(8.1)$$

gegeben. Da aber aus (5.10) und (6.1)

$$n(P)\bar{\beta}(P)=n(M)\bar{\beta}(M)-\left\{\frac{c\mathfrak{l}\cdot\Gamma(n\bar{\beta})}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k}}\right\}_M\cdot\zeta$$

$$\tau_\mu(P_0P)=\tau(M)\left\{\Phi^1(\zeta)-\Phi^1(\zeta_0)\right\}-\sigma(M)\left\{\Phi^1(\zeta)-\Phi^1(\zeta_0)\right\}$$

folgen, geben diese Gleichungen und (5.9), in (8.1) eingesetzt, wegen der Annahme a) und zwar dank dem Exponentialfaktor

$$I_\mu(P_0)=\frac{n\bar{\beta}}{4\pi}\frac{c}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\int_{\zeta_0}^{\infty}\left\{1-\frac{c\mathfrak{l}\cdot\Gamma n\bar{\beta}}{n\bar{\beta}(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\cdot\zeta+\sigma(\Phi^1(\zeta)-\Phi^1(\zeta_0))\right.$$
$$\left.+\frac{c\mathfrak{l}\cdot\Gamma(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})^2}\zeta\right\}e^{-\tau(\Phi^0(\zeta)-\Phi^0(\zeta_0))}\times\Delta(\zeta)d\zeta \qquad \ldots(8.2)$$

bis auf kleine Quantitäten von zweiten Ordnung.

Andererseits gelten auch die folgenden Gleichungen nach (6.3) und (6.4)

$$\tau\int_\zeta^\infty\Delta(\zeta)e^{-\tau\Phi^0}d\zeta=e^{-\tau\Phi^0(\zeta)}-e^{-\tau/2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.3)$$

$$\tau\int_\zeta^\infty\Delta(\zeta)\Phi^1(\zeta)e^{-\tau\Phi^0}d\zeta=-\frac{\Delta}{2}e^{-\tau/2}+\Phi^1(\zeta)e^{-\tau\Phi^0(\zeta)}$$
$$+\frac{1}{\tau}\chi(\tau,\zeta), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.3a)$$

wo gesetzt ist

$$\chi(\tau,\zeta)=\tau\int_\zeta^\infty\zeta\Delta(\zeta)e^{-\tau\Phi^0}d\zeta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.4)$$

Indem man (8.3), (8.3a) benutzt und in (8.2) $\zeta_0=-\infty$ setzt, erhält

man, nach einigen algebraischen Rechnungen, für die dem Beobachter zugängliche Energiemenge pro Einheitsfrequenzintervall derjenigen $\mu$-Strahlung $J_\mu(M)$, die aus dem längs einer Visionslinie liegenden Zylinder von Einheitsquerschnitt herstammt,

$$J_\mu/C=\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\left\{1-e^{-\tau}\right\}+\frac{2c\tau\mathfrak{S}(\tau,\infty)e^{-\tau/2}}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right) \qquad \text{.....(8.5)}^1$$

wobei $C$ eine Konstante und $\mathfrak{S}(\tau,\infty)$ eine durch (4.8) in A definierte Funktion bedeutet, die mit $\chi(\tau,\zeta)$ in Zusammenhang gebracht wird durch

$$\mathfrak{S}(\tau,\infty)=-\frac{\chi(\tau,-\infty)}{2\tau}. \qquad \text{.....(8.6)}$$

Die Gleichung (8.5) lässt sich auch, wie es von dem Vergleichen (5.10) mit (2.4) in A leicht gesehen wird, dadurch ermitteln, dass man $\left\{\frac{1}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k}}\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right)\right\}_M$ anstatt $\frac{\cos\Theta}{\Omega}\cdot\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right)\right\}_P$ in (4.7) in A einsetzt.

§ 9. *Emissionsüberschuss und Strahlungsdruck.* Wir haben in A den Ausdruck für den Emissionsüberschuss in einem Punkt P bei der expandierenden Gashülle abgeleitet. Wir wollen uns hier mit dem allgemeinen Fall beschäftigen und dabei auch den Strahlungsdruck, der insbesondere im dynamischen Problem eine wichtige Rolle spielt, berücksichtigen.

Es handelt sich zunächst um die Intensität der zu dem Punkt P gelangenden Strahlung $I_\nu(P)$ mittels der auf P bezogenen Quantitäten auszudrücken. Man betrachte im P-System eine in Richtung $\mathfrak{l}$ fortpflanzende $\nu$-Strahlung und setze $\nu=\nu_0(1+\eta)$. Es sei, wie in § 5, $\overrightarrow{PS}$ die Richtung $\mathfrak{l}$ und X sei irgendein anderer Punkt auf $\overline{PS}$. Bezeichnet man mit $\nu(X)=\nu_0(1+\xi)$ die Frequenz der $\nu$-Strahlung vom X-System aus gesehen, so erhält man nach den Doppler-Transformationen die Gleichung (vgl. Abb. 1):

$$\nu(X)=\nu(P)\left\{1+\frac{\mathfrak{v}(P)-\mathfrak{v}(X)}{c}\cdot\mathfrak{l}\right\}=\nu(1+\zeta), \text{ wegen (5.1)},$$

oder $\qquad \nu_0(1+\xi)=\nu_0(1+\eta)(1+\zeta)$;

daraus folgt wegen der Annahme a)

$$\xi=\eta+\zeta. \qquad \text{.....(9.1)}$$

1. Berichtigung in A:—Man lese das Vorzeichen − des zweiten Gliedes in der rechten Seite der Gleichung (4.7) als +.

Die optische Länge $\tau_\nu(PX)$ wird nach ihrer Definition (4.1)

$$\tau_\nu(PX)=\int_P^X a(\nu(X))n(X)d\overline{PX}=\int_0^s n(X)\bar{\alpha}(X)\Delta(\xi)ds,$$

hieraus ergibt sich, wenn man (5.9) und (5.10) benutzt,

$$\tau_\nu(PX)=c\cdot\frac{n(P)\bar{\alpha}(P)}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\int_0^\zeta\left\{1-\frac{c[\mathfrak{l}\cdot\Gamma(n\bar{\alpha})}{n\bar{\alpha}(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\zeta+\frac{c[\mathfrak{l}\cdot\Gamma(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})^2}\zeta\right\}\Delta(\xi)d\zeta$$

oder, indem man $\xi$ anstatt $\zeta$ einsetzt und (6.2) und (6.3) berücksichtigt,

$$\tau_\nu(PX)=\tau(P)\left\{\Phi^1(\xi)-\Phi^0(\eta)\right\}-\sigma(P)\left\{(\Phi^1(\xi)-\Phi^1(\eta))-\eta(\Phi^0(\xi)-\Phi^0(\eta))\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.2)$$

Die gesuchte Intensität $I_\nu(P)$ wird nun durch

$$I_\nu(P)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty n(X)\bar{\beta}(X)\Delta(\xi)e^{-\tau_\nu(PX)}ds$$

gegeben. Setzt man hierin $\tau_\nu$ von (9.2) ein, so erhält man nach den ähnlichen Manipulationen und Rechnungen wie in § 8

$$I_\nu(P)=\frac{\bar{\beta}}{4\pi\bar{\alpha}}\int_\eta^\infty\Big[1-(\xi-\eta)\sigma'+\sigma\left\{\Phi^1(\xi)-\Phi^1(\eta)\right\}-\sigma\eta\left\{\Phi^0(\xi)-\Phi^0(\eta)\right\}\Big]\times\tau\Delta(\xi)e^{-\tau(\Phi^0(\xi)-\Phi^0(\eta))}d\xi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.3)$$

wo

$$\sigma'\equiv c[\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{n\bar{\beta}}{\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k}}\right)\Big/n\bar{\beta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.4)$$

Die Integration über $\xi$ gibt dann

$$I_\nu(P)=\frac{\bar{\beta}}{4\pi\bar{\alpha}}\cdot\left\{1-e^{-\tau(\frac{1}{2}-\Phi^0(\eta))}-(\sigma' H_1-\sigma H_2+\sigma H_3)e^{\tau\Phi^0(\eta)}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.5)$$

wobei, (8.3), (8.3$_a$), (8.4) berücksichtigt,

$$H_1\equiv\tau\int_\eta^\infty(\xi-\eta)e^{-\tau\Phi^0(\xi)}\Delta(\xi)d\xi=\chi(\tau,\eta)+\eta(e^{-\tau/2}-e^{-\tau\Phi^0(\eta)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.6)$$

$$H_2\equiv\tau\int_\eta^\infty\left\{\Phi^1(\xi)-\Phi^1(\eta)\right\}e^{-\tau\Phi^0(\xi)}\Delta(\xi)d\xi=\left(\Phi^1(\eta)-\frac{\Delta}{2}\right)e^{-\tau/2}+\frac{\chi(\tau,\eta)}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.6_a)$$

$$H_3\equiv\eta\tau\int_\eta^\infty\left\{\Phi^0(\xi)-\Phi^0(\eta)\right\}e^{-\tau\Phi^0(\xi)}\Delta(\xi)d\xi=\eta e^{-\tau/2}\left(\Phi^0(\eta)-\frac{1}{2}\right)+\frac{\eta}{\tau}\left(e^{-\tau\Phi^0(\eta)}-e^{-\tau/2}\right) \ldots(9.6_b)$$

gesetzt worden sind.

§ 10. Um die vom Atomaggregat (Einheitsvolumen) in P absorbierte Gesamtenergiemenge abzuschätzen, betrachten wir zunächst nur die Beiträge $K(P,\mathfrak{l})$ aller Strahlungen in $\mathfrak{l}$-Richtung. Dazu muss man jede zu P gelangende Strahlung $I_\nu(P)d\nu$ mit dem ihrer Frequenz entsprechenden Absorptionskoeffizienten $n\alpha(\nu)$ multiplizieren und über alle Frequenzen integrieren; man erhält nämlich wegen (2.2)

$$K(P,\mathfrak{l})=\int I_\nu(P)n(P)\alpha(\nu)d\nu=\bar{\alpha}n\nu_0\int_{-\infty}^{+\infty}I_\nu(P)\Delta(\eta)d\eta.$$

Wenn man hierin (9.5) einführt und (1.3), (8.3) berücksichtigt, so ergibt sich

$$K(P,\mathfrak{l})=\frac{\bar{\beta}n\nu_0}{4\pi}\left\{1-\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}-\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma' H_1-\sigma H_2+\sigma H_3)e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.1)$$

Es können nun aus (6.3), (8.3), (8.4) wegen der geraden Funktion $\Delta(\eta)$ leicht bewiesen werden:

$$\tau\int_{-\infty}^{\infty}\chi e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta=-e^{-\tau/2}\chi(\tau,-\infty), \qquad \ldots\ldots\ldots(10.2)$$

$$\tau\int_{-\infty}^{\infty}\eta e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta=-\chi(\tau,-\infty), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.2_a)$$

daher erhält man aus (8.3), (8.3$_a$), (9.6), (9.6$_a$), (9.6$_b$) nach einigen algebraischen Rechnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_1e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta=-\frac{2e^{-\tau/2}\chi(\tau,-\infty)}{\tau}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_2e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.3_a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_3e^{\tau\Phi^0(\eta)}\Delta(\eta)d\eta=e^{-\tau/2}\chi(\tau,-\infty)\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{1}{\tau^2}\right)+e^{-\tau/2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^0(\eta)e^{\tau\Phi^0(\eta)}\eta\Delta(\eta)d\eta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.3_b)$$

Wenn man in dem zweiten Glied von (10.3$_b$) $\eta\to-\eta$ setzt und (6.4), (8.4) berücksichtigt, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^0(\eta)e^{\tau\Phi^0(\eta)}\eta\Delta(\eta)d\eta=-\frac{\chi(\tau,-\infty)}{2\tau}+\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\tau,\eta)\Delta(\eta)d\eta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10.4)$$

Setzt man ferner

$$\frac{e^{-\tau/2}}{\tau^2}\cdot\chi(\tau,-\infty)-\frac{e^{-\tau/2}}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\tau,\eta)J(\eta)d\eta\equiv R(\tau),$$

.....(10.5)

erhält man dann aus (10.3$_b$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_3e^{\tau\Phi^0(\eta)}J(\eta)d\eta=\frac{2e^{-\tau/2}}{\tau^2}\chi(\tau,-\infty)-R(\tau).$$

.....(10.3$_b$)'

Es ist schliesslich aus (6.2), (9.4) leicht bewiesen:

$$\sigma'-\frac{\sigma}{\tau}=\frac{c}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{k})}\mathfrak{l}\cdot\nabla\left(\log\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right).$$

Daher erhält man für $K(P,\mathfrak{l})$ von (10.1) nach (10.3), (10.3$_a$), (10.3$_b$)'

$$K(P,\mathfrak{l})=\frac{\bar\beta n\nu_0}{4\pi}\left\{1-\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}+\frac{2e^{-\frac{\tau}{2}}\chi(\tau,-\infty)}{\bar\alpha n}\mathfrak{l}\cdot\nabla\left(\log\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+\sigma R(\tau)\right\}.\qquad\text{.....(10.6)}^1$$

Wir sind jetzt imstande, den Emissionsüberschuss und Strahlungsdruck zu berechnen. Die Gesamtstrahlungsenergie $A$, die das Atomaggregat im Einheitsvolumen in P absorbiert, wird durch Integration von $K(P,\mathfrak{l})d\omega$ über alle Richtungen. Dabei verschwinden die Grössen erster Ordnung von selbst, weil sie die ungerade Potenz von $\mathfrak{l}$ enthalten. Daher ergibt sich aus (10.6)

$$A=\bar\beta n\nu_0-\frac{\bar\beta n\nu_0}{4\pi}\int\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\omega.$$

Da $\bar\beta n\nu_0$ nach (2.6) der Gesamtemission pro Einheitsvolumen gleich ist, wird der Emissionsüberschuss $E(P)$ gegeben durch

$$E=B-A=\frac{\bar\beta n\nu_0}{4\pi}\int\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\omega.\qquad\text{.....(10.7)}$$

Der Strahlungsdruck, streng genommen, die auf das Einheitsvolumen wirkende Kraft, in einer Richtung $\mathfrak{r}$ wird gegeben durch

$$F_r=\frac{1}{c}\int K(P,\mathfrak{l})(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r})d\omega.$$

Die Glieder mit der geraden Potenz von $\mathfrak{l}$ in (10.6) verschwinden in diesen Falle und es ergibt sich

$$F_r=\frac{\bar\beta n\nu_0}{4\pi c}\int\left\{\frac{2e^{-\frac{\tau}{2}}\chi(\tau,-\infty)}{\bar\alpha n}\mathfrak{l}\cdot\nabla\left(\log\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+\sigma R(\tau)\right\}\cdot(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r})d\omega.\qquad\text{.....(10.8)}$$

---

1. Vgl. § 5. Das vernachlässigte Glied der zweiten Ordnung enthält lauter gerade Potenzen von $\mathfrak{l}$, sodass es dasselbe Zeichen für die entgegengesetzten Richtungen besitzt.

Das hierin vernachlässigte grösste Glied ist, wie aus der Fussnote in S. 105 klar ersichtlich, von dritten Ordnung, so dass es im Vergleich mit dem beibehaltenen Glied ebenso auch von der zweiten Ordnung ist, wie bei (10.7).

§ 11. *Annäherungsausdruck für Strahlungsdruck.* Die Funktionen, $\chi(\tau,-\infty)$, $R(\tau)$ in (10.8) werden gegeben, wenn die Form der Funktion $\Delta(\zeta)$ bekannt wird; die Durchführung der Rechnungen ist jedoch im allgemeinen nicht praktisch. Für die Spektrallinie z. B. die $L_\alpha$-Strahlung bei der Wasserstoffhülle, deren Strahlungsdruck nicht unbedeutend ist, ist die optische Länge $\tau$ sehr gross; in solchem Falle kann man die angenäherten Werte von $\chi(\tau,-\infty)$ und $R(\tau)$ leicht berechnen.

$\chi(\tau,-\infty)$ ist durch (8.4) definiert, oder nach (6.3), (10.2$_a$) umgeschrieben

$$-\chi(\tau,-\infty)e^{-\tau/2}=\frac{\tau\int_{-\infty}^{\infty}\zeta e^{\tau\int_0^\zeta\Delta(\zeta)d\zeta}\Delta(\zeta)d\zeta}{e^{\tau/2}}; \qquad \text{.....(11.1)}$$

$-\chi e^{-\frac{\tau}{2}}$ ist ein gewichteter Mittelwert von $\zeta$, dessen Gewicht wegen der Eigenschaft von $\Delta(\zeta)$ und des grossen Wertes von $\tau$ ein scharfes Maximum im positiven Gebiet besitzt. Bezeichnet man also den diesem entsprechenden Wert von $\zeta$ mit $\zeta_m$, so erhält man als erste Approximation

$$\chi(\tau,-\infty)\fallingdotseq-\zeta_m e^{\tau/2}. \qquad \text{.....(11.2)}$$

$\zeta_m$ hängt selbstverständlich nicht nur von der Form von $\Delta(\zeta)$, sondern auch von $\tau$ ab. Um seine Abhängigkeit von $\tau$ klar zu machen, betrachten wir einen besonderen Fall, wo die Geschwindigkeitsverteilung der regellosen Bewegungen der Atomen das *Boltzmann*sche Gesetz befolgt. Man hat dann nach der Fussnote in S. 98 $\Delta(\zeta)=\frac{1}{\pi\Delta}e^{-\zeta^2/\pi\Delta^2}$ und nach einer Reihe der üblichen Rechnungen

$$x=\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, \quad \text{wo} \quad x\equiv\frac{\zeta_m}{\sqrt{\pi}\,\Delta}. \qquad \text{.....(11.3)}$$

Diese Gleichungen zeigen augenscheinlich, dass die Änderung von $\tau$ auf $\zeta_m$ nur unbedeutende Einfluss ausübt, so dass wir in der Praxis $\zeta_m$ als eine Konstante annehmen können. $x$ nimmt in der Tat nur von 2.2 bis 2.5 zu, wenn $\tau$ sich von 2200 zu 11500 ändert.[1]

Das Glied von $R(\tau)$ in (10.8) scheint, unter unserer Annahme,

1. Nämlich:

| $x=\zeta_m/\sqrt{\pi}\Delta$ | 2.0 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 740 | 2200 | 3700 | 6500 | 11500 |

nämlich für sehr grosse $\tau$, klein zu sein. Das ist nicht streng bewiesen worden, kann aber für eine einfache Spezialform von $\Delta(\zeta)$ leicht bestätigt werden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\zeta)&=a\,(\text{Konst.}) \quad \text{für} \quad |\zeta|<\delta \\ \Delta(\zeta)&=0 \qquad\qquad\ \ \text{für} \quad |\zeta|>\delta \end{aligned}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11.1)$$

Man erhält dann aus (6.3), (6.4), (8.4), (10.5) die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\delta=2\Delta, \quad 2a\delta=1, \quad \Phi^0(\zeta)=a\zeta, \\ &\chi(\tau,-\infty)=-2\delta\cosh\frac{\tau}{2}+4\frac{\delta}{\tau}\sinh\frac{\tau}{2}, \\ &R(\tau)=\frac{\delta}{\tau}e^{-\frac{\tau}{2}}\left(1+\frac{2}{\tau}\right)-\frac{2\delta}{\tau^3}(1-e^{-\tau}) \end{aligned}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11.5)$$

Vernachlässigt $\frac{1}{\tau}$ sowie $e^{-\tau}$ gegen eins, so hat man

$$\chi=-2\Delta e^{\frac{\tau}{2}}, \quad R(\tau)=-\frac{4\Delta}{\tau^3}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11.6)$$

Das Verhältnis des Gliedes von $R(\tau)$ in (10.8) zum anderen wird wegen (6.2)

$$\sigma R(\tau):\left\{-\frac{2\chi(\tau,-\infty)}{\bar{a}n}e^{-\frac{\tau}{2}}\,\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\log\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right\}\sim\frac{R(\tau)}{2\chi(\tau,-\infty)}\,\tau^2e^{\frac{\tau}{2}},$$

oder nach (11.6) $\sim\frac{1}{\tau}$, was klein ist gegen eins falls $\tau$ gross ist. (10.8) lautet folglich wegen (11.2)

$$F_r=-\frac{\zeta_m\nu_0}{2\pi c}\int\left(\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right)\cdot(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r})d\omega. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11.7)$$

Um das Integral durchzuführen, machen wir vom Polarkoordinatensystem Gebrauch, dessen Z-Achse mit der Richtung von $\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)$ übereinstimmt. Es seien $\mathfrak{l}\,(1,\,\theta,\,\varphi)$ und $\mathfrak{r}\,(1,\,\Theta,\,\Phi)$; dann ist $\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)=\cos\theta\cdot\left|\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right|$. Man erhält dann nach einigen algebraischen Rechnungen

$$\int(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r})\cdot\left(\mathfrak{l}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right)d\omega=\frac{4\pi}{3}\cos\Theta\left|\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right|.$$

Da aber $\cos\Theta\left|\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)\right|=\mathfrak{r}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)$ ist, ergibt sich aus (11.7)

$$F_r=-\frac{2\nu_0\zeta_m}{3c}\mathfrak{r}\cdot\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11.8)$$

Vermittels dieses Ausdruck für den Strahlungsdruck kann man die Bewegungsgleichungen in verschiedenen Fällen konstruieren. Als einen speziellen Fall erhält man für die parallele Nebelschicht eine Gleichung, die der *Zanstra*schen ganz analog ist.[1]

§ 12. *Annäherungsausdrück für Emissionsüberschuss.* Die Gleichung (10.7) ist nach (6.2) umzuschreiben:

$$E=\frac{\nu_0\bar{\beta}}{4\pi c\bar{\alpha}}\int\left(1-e^{-\frac{cn\bar{\imath}}{(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})}}\right)\cdot(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})d\omega, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12.1)$$

wobei $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ sowie $\int(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})d\omega$ durch (7.10) bzw. (7.11) gegeben sind.

Wir begegnen in der heutigen Astrophysik der Erscheinung der Materiezerstreuung bei manchen Himmelskörpern, wie z. B. den neuen Sternen und P-Cygni-Sternen u. a.[2] In diesem Fall gibt es immer $D\rho/Dt<0$, wo $\rho$ die Dichte bedeutet, oder, was gleich bedeutend ist, $\mathrm{div}\mathfrak{v}>0$, wegen der Kontinuitätsbedingung. Daher wird der Mittelwert von $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ nach (7.11) immer positiv.

Bei der Ableitung von (12.1) haben wir angenommen, dass $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ für alle Richtungen positiv ist, das ist jedoch, streng gesprochen, nicht immer der Fall, d. h. $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ könnte unter Umständen für einige Richtungen negativ sein. Da aber der Mittelwert von $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ positiv ist, muss $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ innerhalb des grössten Teils des Raumwinkels positiv sein, so dass (12.1) in guter Annäherung gelten muss. Setzen wir nun weitergehend den durch (7.11) gegebenen Mittelwert von $(\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{f})$ in (12.1) ein, was zu unserem Zweck ausreichen wird, so erhalten wir für den Emissionsüberschuss

$$E=\frac{\nu_0\bar{\beta}}{3c\bar{\alpha}}\left\{1-e^{-\frac{3cn\bar{\alpha}}{\mathrm{div}\mathfrak{v}}}\right\}\cdot\mathrm{div}\mathfrak{v}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12.2)^3$$

§ 13. Die Grösse $\frac{3cn\bar{\alpha}}{\mathrm{div}\mathfrak{v}}$ in (12.2) lässt sich als eine Art von Mittelwert der optischen Gesamtlängen in allen Richtungen betrachten. Bezeichnet man sie mit $\bar{\tau}$ (oder strenger $\bar{\tau}_{ij}$), so hat man

---

1. M. N. **96** (1936) 46, Gl. (22).
2. Gerasimovič, *loc. cit.*; H. Zanstra, M. N. **95** (1934) 84; S. Rosseland, Theoretical Astrophysics, 287; E. G. Williams, M. N. **97** (1937) 612; C. S. Beals, M. N. **95**(1935) 585; O. Struve, Ap. J. **81** (1935) 66; T. Araki u. M. Kurihara, Jap. J. Ast. Geo., **14** (1937) 305.
3. Vgl. Gleichung (5.8) in A, wo $\mathrm{div}\mathfrak{v}=\frac{V}{r}\left(1-\frac{\Gamma}{3}\right)$ ist.

$$\bar{\tau}_{ij}=\frac{3cn\bar{\alpha}_{ij}}{\mathrm{div}\mathfrak{v}} \quad \text{oder} \quad \bar{\tau}_{ij}=\frac{A_{ji}n_i}{\tilde{\omega}_{ji}}\cdot\frac{3}{\mathrm{div}\mathfrak{v}} \quad \text{wegen (2.3).}$$

.....(13.1)

In folgenden soll dieses $\bar{\tau}$ als die mittlere optische Gesamtlänge verstanden werden.

Es ist wohl geeignet, an dieser Stelle einige oben ermittelten Formeln mittels $\bar{\tau}$ auszudrücken.

Für den Emissionsüberschuss wird Gleichung (12.2)

$$E=B-A=\frac{\bar{\beta}n\nu_0}{\bar{\tau}}(1-e^{-\bar{\tau}}), \qquad \text{.....(13.2)}$$

woraus nach (2.6), für die Gesamtabsorption

$$A=\bar{\beta}n\nu_0\left(1-\frac{1-e^{-\bar{\tau}}}{\bar{\tau}}\right). \qquad \text{.....(13.3)}$$

Da das zweite Glied in (2.5) zu $\frac{n_j}{n_i}\frac{q_i}{q_j}\frac{A(\nu_{ij})}{n\nu_{ij}}$ gleich ist, so erhält man also

$$\bar{\beta}_{ji}=\frac{A_{ji}hn_j}{n}\left\{1-\frac{n_j}{n_i}\frac{q_i}{q_j}\left(1-\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}}\right)\right\}^{-1}.$$

.....(13.4)

Nun wird der den $j \rightleftarrows i$ Übergängen entsprechende Emissionsüberschuss in Quanta durch $E(\nu_{ij})/h\nu_{ij}$ gegeben, was der Bezeichnungsweise im Teile II nach als $Q_{(j,i)}$ zu schreiben ist, so ergibt sich aus (13.2), (13.4)

$$Q_{(j,i)}=\frac{E(\nu_{ij})}{h\nu_{ij}}=\frac{A_{ji}n_j}{\bar{\tau}_{ij}}\cdot\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{1-\frac{n_j}{n_i}\frac{q_i}{q_j}\left(1-\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}}\right)}.$$

.....(13.5)

Können die erzwungenen Emissionsübergänge vernachlässigt werden, so folgt

$$Q_{(j,i)}=\frac{A_{ji}n_j}{\bar{\tau}_{ij}}(1-e^{-\bar{\tau}_{ij}}); \qquad \text{.....(13.5a)}$$

woraus folgt, unabhängig von $\bar{\tau}_{ij}$,

$$0<Q_{(j,i)}<\frac{A_{ji}n_j}{\bar{\tau}_{ij}}. \qquad \text{.....(13.5b)}$$

Wenn insbesondere $\bar{\tau}_{ij}\gg 1$ ist, erhält man

$$Q_{(j,i)}\to\frac{A_{ji}n_j}{\bar{\tau}_{ij}}=\tilde{\omega}_{ji}\frac{n_j}{n_i}\frac{\mathrm{div}\mathfrak{v}}{3}. \qquad \text{.....(13.5c)}$$

Wenn dagegen $\bar{\tau}_{ij}\ll 1$ ist, so reduziert sich (13.5) im allgemeinen

$$Q_{(j,i)}\to A_{ji}n_j \qquad \text{.....(13.6)}$$

§ 14. *Direkte Strahlung vom Zentralstern.* In den vorhergehenden Abschnitten haben wir uns mit derjenigen monochromatischen Strahlungen beschäftigt, die aus irgendwelchen Atomen innerhalb der Gaswolke emittiert worden sind. Man muss aber ausserdem auch die von dem Zentralstern her direkt kommenden Strahlungen betrachten. Unter solchen Strahlungen vermögen nur die folgenden beiden Teile auf die Atome in der Gaswolke einzuwirken, nämlich, die sog. Ultraviolettstrahlungen, deren Wellenlänge ausserhalb der Grenze der jeweils zu betrachtenden Spektralserie liegt, und diejenigen monochromatischen Strahlungen, deren Frequenz in der Nähe irgendeiner Eigenfrequenz der Atome liegt. Die ersteren können die Atome ionisieren, und spielen infolgedessen eine wichtige Rolle in der Rekombinationstheorie des Emissionsmechanismus. Dagegen vermögen die letzteren die Atome nur anzuregen und ausserdem ist ihre Gesamtenergiemenge im Vergleich mit der der ersteren klein, so dass sie gewöhnlich vernachlässigt zu werden pflegt. Es ist aber auch zu vermuten, dass die Anregung bei den Sternen von niedrigerer Temperatur zur Erzeugung der Emissionslinie ebensoviel wie die Einfangsprozesse der Elektronen beitragen kann. Aus diesem Grunde wollen wir sie auch in Betracht ziehen.

Die Intensität $J_i$ der Ultraviolettstrahlung (in weiterem Sinn) ausserhalb der $i$-Seriengrenze nimmt mit der Entfernung vom Zentralstern in Folge der Absorption ab. Diese Verhältnisse sind insbesondere für $J_1$ von Chandrasekhar, Gerasimovič u. s. a. theoretisch untersucht worden. Für den Zweck in dieser Abhandlung jedoch genügt es, von dem mittleren Wert von $J_i$ (sei $J_i$) für die ganze Gashülle Gebrauch zu machen.

Damit man den mittleren Wert von $J_i$ sowie auch im allgemeinen den einer beliebigen physikalischen Grösse $\mathfrak{A}$ eindeutig definieren kann, nehmen wir annäherungsweise das Gewicht $e^{-\tau_1}$ für die Vermittelung an, das die Intensität der Ultraviolettstrahlung ausserhalb der Lymangrenze $J_1$ ungefähr proportional ist, wobei $\tau_1$ die dem Abstand vom Zentralstern entsprechende optische Länge in bezug auf $J_1$ bedeutet. Der Grund dieser Annahme lässt sich etwa daraus ersehen, dass jede Grösse, so lange sie sich auf optische Erscheinung bezieht, um so grössere physikalische Wichtigkeit haben müsste, je grösser das Emissionsvermögen in dem betrachteten Punkte ist, und dass dieses seinerseite mit dem Ionisationsvermögen oder $J_1$ wachsen müsste. Auf diese Weise erhält man

$$\bar{\mathfrak{A}} = \int_0^\infty \mathfrak{A} e^{-\tau_1} d\tau_1. \qquad \text{.....(14.1)}$$

Dabei darf die obere Grenze der Integration durch $\infty$ ersetzt werden, weil die gesamte optische Länge dadurch unendlich wird, dass man eine ganz dünne Schicht zur Gashülle von etwa $\tau_1 = 2$ hinzufügt.[1]

Bezeichnet man mit $(J_i)_0$ den Wert von $J_i$ auf der Sternoberfläche, so ergibt sich nach (14.1) für $i = 1$, insbesondere,

$$J_1 = \frac{\omega^2}{4}(J_1)_0 \int_0^\infty e^{-2\tau_1} d\tau_1 = \frac{\omega^2}{8}(J_1)_0 \qquad \text{.....(14.2)}$$

wo $\omega$ das Verhältnis des Radius des Zentralsterns zu dem der Gashülle bedeutet. Aber für andere $i (\geqq 2)$ bleibt der Wert von $J_i$ überall beinahe konstant,[2] so dass man erhält

$$J_i = \frac{\omega^2}{4}(J_i)_0 \int_0^\infty e^{-\tau_1} d\tau_1 = \frac{\omega^2}{4}(J_i)_0, \quad i \geqq 2. \qquad \text{.....(14.2}_a\text{)}$$

$(J_i)_0$ wird hier, gemäss dem *Planck*schen Gesetz, durch

$$(J_i)_0 = 3.52 \times 10^7 \times T^4 \int_{x_i}^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad x_i = \frac{h\nu_i}{kT}$$

$$\text{.....(14.3)}$$

gegeben, wobei $\nu_i$ die Grenzfrequenz der $i$-Serie und $T$ die effektive Temperatur in Einheiten von 1000° bedeutet.

§ 15. Wir wollen nun den Übergangskoeffizienten $B_i$ sowie den Absorptionskoeffizienten $a_i$ des $i$-Atoms für die $J_i$-Strahlung berechnen. Bezeichnet man im allgemeinen mit $B_{ix}$ den Koeffizienten dafür, dass ein Atom durch Absorption eines $\nu_{ix}$-Quantums von einem diskreten Zustande $i$ zu einem Intervalle $x$, $x + dx$ der kontinuierlichen Zustände übergeht, so folgen aus ihren Definitionen

$$B_i \int I_\nu d\nu = \int \left(\frac{B_{ix}}{d\nu}\right) I_\nu d\nu, \quad a_i \int I_\nu d\nu = \frac{h}{4\pi} \int \nu_{ix} \left(\frac{B_{ix}}{d\nu}\right) I_\nu d\nu,$$

$$\text{.....(15.1)}$$

wobei $B_{ix}$ durch

$$B_{ix} = \frac{4\pi^2 e^2}{hmc\nu_{xi}} f_{xi} dx \qquad \text{.....(15.2)}^3$$

gegeben ist.

Indem man für die $J_i$-Strahlung das *Planck*sche Gesetz und für die Oscillatorstärke $f_{xi}$ den *Kramers*schen Ausdruck annimt, erhält man für das Wasserstoffatom aus (15.1) und (15.2)

---

1. Vgl. Zanstra, M. N. **93** (1932) 131.
2. Vgl. § 20.
3. Vgl. D. H. Menzel und C. L. Pekeris, M. N. **93** (1935) 77, Gl.(2.1), (2.2).

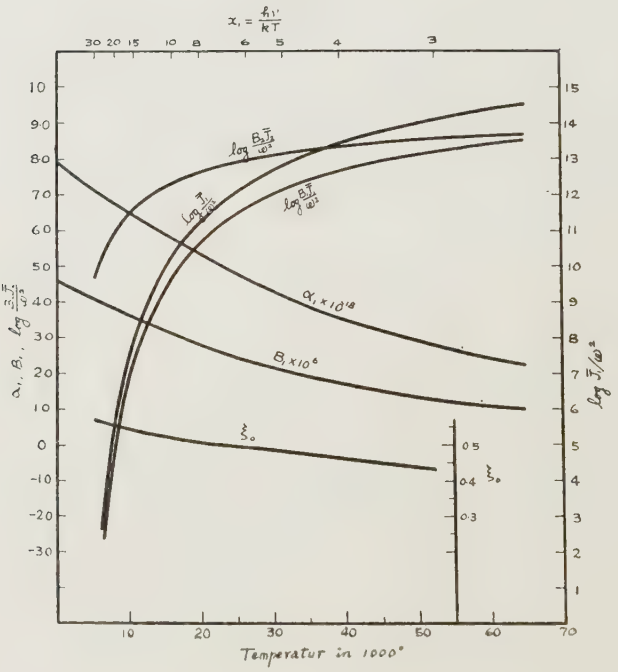
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{hmcR^2}{\pi e^2}\,\frac{3\sqrt{3}}{2^6}B_i=\frac{1}{4.60\times10^{-6}}\cdot B_i\\
&\qquad=i^3x_i^4\int_{x_i}^{\infty}\frac{1}{e^x-1}\cdot\frac{dx}{x}\Big/\int_{x_i}^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx\\
&\frac{mcR}{e^2}\,\frac{3\sqrt{3}}{2^4}a_i=\frac{1}{7.88\times10^{-18}}\cdot a_i\\
&\qquad=ix_i^3\int_{x_i}^{\infty}\frac{dx}{e^x-1}\Big/\int_{x_i}^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx
\end{aligned}\right\}.$$

.....(15.3)

Die Ionisationswahrscheinlichkeit des $i$-Atoms ist gleich zu $\frac{B_iJ_i}{4\pi}$, deren Wert aus (14.2), (14.2$_a$), (14.3), (15.3) berechnet wird; insbesondere für hinreichend kleinen Wert von $x_i$

$$\frac{B_iJ_i}{4\pi}\sim 2\pi\omega^2\frac{e^2R}{mc^3}\,\frac{2^4}{3\sqrt{3}}\,\frac{1}{i^3}\left(\frac{kT}{h}\right)\times\left\{1+\frac{x_i}{2}\log x_i+\cdots\cdots\right\},\quad i\geqq 2.\quad\ldots\ldots\ldots(15.4)$$

Abb. 2



Die Ergebnisse der Berechnungen von $J_1$, $a_1$, $B_1$ und $\frac{B_1 J_1}{4\pi}$, $\frac{B_2 J_2}{4\pi}$ sind in Abb. 2 veranschaulicht.

§ 16. Die Anzahl der Einfangsvorgänge von freien Elektronen pro Zeiteinheit pro Volumeneinheit wird nach (1.50) und (1.53) in der Abhandlung Menzels (*loc. cit.*) berechnet durch

$$n_0 n_e f(v) v \frac{2^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^2 h}{m^2 c^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{z^3} g_{II} dv,$$

wobei $n_e$, $f(v)$ die Zahl pro Volumeneinheit bzw. die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion von freien Elektronen bedeuten.

Wenn man das *Maxwell*sche Gesetz für $f(v)$ benutzt und Menzels $g_{II}$ angenähert als 1 setzt, so erhält man $n_0 n_e D M(i,T)$ für die Gesamtanzahl des Einfangens in den $i$-Zustand, wo $D$ eine Konstante $\left(=\frac{2^9\pi^5}{(6\pi)^{3/2}} \cdot \frac{e^{10}}{m^2 c^3 h^3} \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^{3/2} = 3.22 \times 10^{-6}\right)$ ist, während $M(i,T)$ eine gewisse Funktion ist, deren Werte Cillié numerisch berechnet hat.

Die Wahrscheinlichkeit $A_i$ dafür, dass ein ionisiertes Atom ein freies Elektron in den $i$-Zustand einfängt, ist selbstverständlich

$$A_i = n_e D M(i,T). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16.1)$$

§ 17. Danach betrachten wir die den Eigenfrequenzen des Atoms entsprechenden Sternstrahlungen. Man fasse nun in einem P-System ein Bündel solcher Strahlungen ins Auge. Wenn der Verdünnungsfaktor dabei nicht zu klein ist, so stimmt die Richtung des Bündels annäherungsweise mit der des Radiusvektors I des P-Systems überein. Dann lässt sich die Absorption im P-System leicht berechnen. Zu diesem Zweck hat man die optische Länge von P für die direkte Sternstrahlung mit der Frequenz $\nu = \nu_0(1+\eta)$ in bezug auf das P-System zu berechnen; indem man nämlich in (9.2) $\xi \to \infty$ setzt, erhält man

$$\tau_\nu(P,\infty) = \tau(P)\left\{\frac{1}{2} - \Phi^1(\eta)\right\} - \sigma(P)\left\{\left(\frac{A}{2} - \Phi^1(\eta)\right) - \eta\left(\frac{1}{2} - \Phi^0(\eta)\right)\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17.1)$$

Wenn man nun der Einfachheit halber die Intensität $J_\nu$ der Strahlung in der Nachbarschaft der betrachteten Linie als konstant annimmt, so wird die im P zu absorbierende Gesamtenergiemenge $A_S$ pro Volumen- und Zeiteinheit durch

$$A_S = J_\nu \int e^{-\tau_\nu} a(\nu) n d\nu$$

gegeben. Hieraus erhält man auf dieselbe Weise in § 10

$$A_S = J_\nu(\mathbf{l}\cdot\mathbf{f})\frac{\nu_0}{c}\left\{1 - e^{-\tau} - \tau\sigma R(\tau)\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17.2)$$

Dabei ist $R(\tau)$ durch (10.5) definiert; es folgt demnach aus (11.5) und (6.2)

$$|\tau\sigma R(\tau)| \sim \frac{1}{\tau}\frac{\tau v}{l'} \quad \text{für} \quad \tau \gg 1$$

$$\text{„} \qquad \sim \tau\frac{\tau v}{l'} \quad \text{für} \quad \tau \ll 1,$$

wo $\tau v$ und $l'$ die mittlere Geschwindigkeit der regellosen Bewegungen bzw. die des P-Systems bedeuten. Wenn man also das dritte Glied in den Klammern von (17.2) wegen der Kleinheit von $\tau v/l'$ vernachlässigt, so erhält man als erste Approximation

$$A_S = J_\nu(\mathbf{l}\cdot\mathbf{f})\frac{\nu_0}{c}(1 - e^{-\tau}). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17.2a)$$

Man hat ausserdem nach dem *Planck*schen Gesetze

$$J_\nu = \frac{\omega^2}{4}\frac{8\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17.3)$$

§ 18. *Zum Strahlungsionisationsgleichgewicht.* Wir fassen die im $i$-Zustande befindlichen Atome in einem Atomaggregat in einem Volumenelement ins Auge. Ihre Zahl wird einerseits durch die Ionisations- und die Anregungsvorgänge sowie durch das Emittieren des Lichtquantums verkleinert, und andererseits durch die Übergänge zu diesem Zustande von den anderen aus in Folge der Absorption oder Emission und durch das Einfangen freier Elektronen vergrössert. Die Differenz dieser beiden Änderungen pro Zeiteinheit ist selbstverständlich gleich der Zeitderivative der Zahl der betrachteten Atome. Wenn sie verschwindet, möchten wir sagen, dass sich die Gashülle oder Atmosphäre im „*Strahlungsionisationsgleichgewicht*" befindet. Wir wollen solche Geichung, welche die Bedingung für dieses Gleichgewicht darstellt, „*allgemeine Zyklusgleichung*" nennen.

Was solches Gleichgewicht anbetrifft, so sind insbesondere die folgenden drei Punkte zu bemerken, die man bei der Entwicklung der Theorie in Teil II zu berücksichtigen hat.

(1) Bei den Sternen von hoher Temperatur wie *Be*-Sternen herrscht die Ionisation vom Grundzustande und folglich auch das Einfangen von Elektronen am stärksten vor. Der Absorptionskoeffizient $\alpha_1$ oder, was dasselbe ist, die Absorption der Quanten $B_1$ für den ersteren Vorgänge nimmt, während die Temperatur von 30,000° bis zu 10,000° abnimmt, ungefähr um 50% zu, indem $\alpha_1$ und $B_1$ am Ende je zu einem Grenzwert $7.88 \times 10^{-18}$ bzw. $4.60 \times 16^{-6}$ konvergieren. Ebensowenig bedeutend

ändern sich die dem letzteren Vorgang entsprechenden Koeffizienten $A_i$ innerhalb des ziemlich umfangreichen Temperaturgebiets; das ist insbesondere der Fall bei ihren Verhältnissen zueinander, wie die Rechenergebnisse Cilliés zeigen. Man kann also nötigensfall diese beiden Koeffizienten als Konstanten approximieren.

(2) Es ist nach (13.5) und (13.5$_a$) klar, dass $\frac{n_j q_i}{n_i q_j}\left(1-\frac{1-e^{-\bar{\tau}}}{\bar{\tau}}\right)$ dem Beitrage der erzwungenen Emissionsübergänge ($j\to i$) zum Emissionsüberschuss $Q_{[j,i]}$ massgebend ist. Man kann aus den Tabellen IV, VI, VII, VIII durch unmittelbare Abschätzungen leicht sehen, dass entweder der Faktor $\frac{n_j}{n_i}\frac{q_i}{q_j}$ oder der Emissionsüberschuss selbst sehr klein wird, wenn $\bar{\tau}_{ij}$ nicht unbedeutend ist, infolgedessen darf man in den allgemeinen Zyklusgleichungen jene massgebende Grösse vernachlässigen.

(3) Bei den *Be*-Sternen ist die Intensität der direkten Sternstrahlung um so schwächer, je höher die Spektralserie ist und, wenn $\bar{\tau}$ klein wird, kann die durch sie verursachte Anregung ausserdem vernachlässigt werden (vgl. (17.2$_a$)). Es genügt also für uns nur diejenigen Anregungen zu betrachten, die durch die den grössten $\bar{\tau}$ entsprechenden Lymanlinien verursacht werden. Indem man den Ausdruck (17.2$_a$) längs eines Radius integriert, so erhält man die Gesamtenergie, die durch die Atome in einem Zylinder mit Einheitsquerschnitt absorbiert wird, nämlich

$$J_\nu \frac{\nu_0}{c}\int (1-e^{-\tau_\nu})(1+f)\,dr \sim J_\nu \Delta\nu, \quad \tau_\nu \gg 1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.1)$$

wobei $\Delta\nu$ den Umfang der Geschwindigkeiten längs des Radius, in Frequenz ausgedrückt, bedeutet.

Das Verhältnis der Häufigkeit der Anregungen zu der der Ionisationen vom Grundzustand wird angenähert durch $\sum J_\nu \Delta\nu / 2\bar{J}_1$ (sei $=\gamma$) gegeben, wobei sich die Summation über die Lymanserie erstreckt. Wenn man beispielsweise $L_\beta$-Strahlung ins Auge fasst, so erhält man aus (17.3) und (18.1)

| Temp. in 1000° | 31.4 | 26.2 | 19.6 | 15.7 | 10.5 | 7.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{L\beta}\Delta\nu/2\bar{J}_1$ | $1.0\times10^{-3}$ | $1.5\times10^{-3}$ | $2.8\times10^{-3}$ | $4.7\times10^{-3}$ | $1.4\times10^{-2}$ | $3.3\times10^{-2}$ |

dabei ist $\Delta\nu.c = 100$ km/sec angenommen worden. Die Frequenzdifferenz benachbarter Linien wird kleiner als $\Delta\nu$, wenn die laufende Quantenzahl hinreichend gross wird, und zugleich wird die entsprechende Strahlungsintensität schwächer als die von $L_\beta$; $\gamma$ ist also, wie aus einfachen Rechnungen folgt, der Grössenordnung nach etwa 20 mal so gross wie

die in der Tabelle. Es ist daher leicht zu sehen, dass die Anregung bei Temperatur niedriger als 10,000° beträchtlich häufig stattfindet, und dass sie bei 20,000° auch noch nicht unbedeutend bleibt, namentlich $\gamma \fallingdotseq 0.05$. Da sich solcher Vorgang jedoch meistenfalls auf höhere Zustände bezieht, darf man ihn für *Be*-Sterne vernachlässigen, so lange man sich auf die niedrigeren Zustände beschränkt, was aber ein kleines Herabsetzen der Temperatur zur Folge hat.

## II. Strahlungsionisationsgleichgewicht.

§ 19. *Allgemeine Zyklusgleichungen.* In diesem Teil soll die Theorie des Strahlungsionisationsgleichgewichts auf die Wasserstoffgashülle in Bewegung angewandt werden.

Es seien $Q^e_{j,i}$ und $Q^a_{i,j}$ die Zahlen der $j \to i$ bzw. $i \to j$ Übergänge pro Volumeneinheit pro Zeiteinheit, wobei $j > i$ anzunehmen ist. Für die Nettovermehrung der $i$-Atome infolge solcher Übergänge schreiben wir der Einfachheit halber so:

$$Q_{[j,i]} \equiv Q^e_{j,i} - Q^a_{i,j}.$$

Man erhält dann als die fundamentale Gleichung für den $i$-Zustand

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathfrak{v}) = n_0 A_i - \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]} - \sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]},$$

oder wegen der Kontinuitätsbedingung

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]} + \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]} - n \frac{D}{Dt}\left(\frac{n_i}{n}\right), \qquad \text{.....(19.1)}$$

wobei $n_0 A_i$ die Häufigkeit des Einfangens von freien Elektronen und $\frac{B_i J_i}{4\pi} n_i$ die der Ionisation bedeutet; die Anregungen der direkten Sternstrahlungen sind ausser acht gelassen. Wenn man (19.1) über alle Zustände summiert, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = \sum_{i=1}^{\infty} n_0 A_i + n \frac{D}{Dt}\left(\frac{n_0}{n}\right), \qquad \text{.....(19.2)}$$

welche wir „Ionisationsgleichung" nennen möchten.

Die Zeitderivative in (19.1) und (19.2) ist im allgemeinen ganz klein, es sei denn, dass es sich um das äusserste Gebiet der Gashülle oder um die Atmosphäre vom späteren Spektraltypus handelt. Man darf also bei den *Be*-Sternen annehmen, dass sich die Gashülle im Strahlungsionisationsgleichgewicht befindet. Dann werden (19.1) und (19.2) einfach

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]} + \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]}, \qquad \text{.....(19.3)}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \sum_{j=1}^{\infty} n_0 A_j. \qquad \text{.....(19.4)}$$

Diese Gleichungen gelten natürlich in jedem Punkte der betrachteten Gashülle. Will man sie aber als die Zyklusgleichungen für einen durchschnittlichen Zustand der ganzen Gashülle ansehen, so hat man anstatt der darin auftretenden Grössen ihre Mittelwerte von irgendwelcher Art, wie z. B. in § 14 erwähnt, einzusetzen.

§ 20. Wenn man in (19.3) $i=1$ setzt, so ergibt sich

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20.1)$$

Hier ist die rechte Seite wegen (13.5$b$) immer positiv; man kann also

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1, \quad 1 > \xi > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (20.2)$$

setzen: oder

$$(1-\xi) \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = n_0 A_1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20.2_a)$$

Setzt man weiterhin

$$\xi_0 = \sum_{j=2}^{\infty} l_j \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} l_j \ (<1). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20.3)$$

so erhält man aus (20.2$_a$) nach (19.4)

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \left( \frac{1-\xi}{1-\xi_0} - 1 \right) \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (20.4)$$

Die linke Seite ist wieder positiv, so dass gemäss (20.2)

$$\xi_0 > \xi > 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20.5)$$

nämlich ändert sich die Grösse $\xi$ nach den verschiedenen physikalischen Bedingungen der Gashülle zwischen den Grenzwerte 0 und $\xi_0$, und $\xi_0$ hängt nur von der Temperatur und zwar in ganz geringem Masse ab (vgl. Abb. 2). $\xi$ darf also als einen, oben genannte Bedingungen charakterisierenden Parameter gewählt werden.

Setzt man in (20.4) $\xi=0$, so ergibt sich

$$\frac{\xi_0}{1-\xi_0} \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 > \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20.6)$$

wo $\xi_0/1-\xi_0$, wie aus Abb. 2 gesehen wird, ungefähr 1 beträgt. Hieraus können wir einen wichtigen Schluss ziehen, dass die Ionisationsvorgänge vom Grundzustand aus häufiger als dieselben Übergänge von allen übrigen Zuständen aus stattfinden, woraus folgt, dass die Intensität $J_i$ ($i \geqq 2$) überall in der Gashülle beinahe konstant ist, weil $J_i \geqslant J_1$ für $Be$-Temperatur ist. So lautet die schon in § 14 gemachte Voraussetzung.

(20.6) bestimmt ausserdem die obere Grenze von $n_2/n_1$.[1]

1. Nämlich; $T$ in 1000° 20 30 50
$n_2/n_1 \quad < \quad 0.013 \quad 0.08 \quad 0.14$

§ 21. Es ergibt sich aus (20.1) und (20.2)

$$\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} = \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 ; \qquad \text{.....(21.1)}$$

nämlich ist der Gesamtemissionsüberschuss der Lymanlinien in Quanten gleich der Häufigkeit der Ionisationen vom Grundzustand, multipliziert durch $\xi$. Wie man später sehen wird, $\xi = \xi_0$ und $\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} = Q_{[2,1]}$, falls der Verdünnungsfaktor hinreichend gross ist. (21.1) wird dann

$$Q_{[2,1]} = \xi_0 \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 . \qquad \text{.....(21.2)}$$

d. h. ebensoviele $L_\alpha$-Quanten müssen emittiert werden, wie die im Ultraviolett zu absorbierenden Quanten, multipliziert mit $\xi_0$. Dabei reduziert sich $\xi$ zu der von Ambarzumian benutzten Grösse $1-p$.[1]

§ 22. *Ionisationsgrad.* (20.2$_a$) kann umgeschrieben werden:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{1-\xi} \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1} . \qquad \text{.....(22.1)}$$

Man kann also den Ionisationsgrad streng berechnen, wenn der Wert von $\xi$ bekannt wäre; das ist nicht der Fall, denn man wird den letzteren erst dann bestimmen können, wenn das Problem völlig gelöst werden wird. Hier reicht es aber aus, seine Grössenordnung zu kennen; zu diesem Zweck setzt man die Grenzen von $\xi$ aus (20.5) in (22.1) ein, nämlich

$$\frac{1}{1-\xi_0} \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1} > \frac{n_1}{n_0} > \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1} , \qquad \text{.....(22.2)}$$

wobei $\xi_0$ etwa $\frac{1}{2}$ ist. Der Mittelwert dieser beiden Grenzen bestimmt also den Ionisationgrad innerhalb eines Fehlerbereiches von 50%. Auf diese Weise werden die Rechnungen durchgeführt, indem man die Werte von $\frac{B_1 J_1}{\omega^2}$ aus Abb. 2 und den $M(i,T)$ gegeben von Cillié für $T = 20{,}000°$ braucht; bei $M(i,T)$ lassen wir die Änderung der Temperatur ausser acht, was deshalb gestattet werden wird, weil die Abhängigkeit von der Temperatur nicht so bedeutend ist.[2] Die Ergebnisse der Rechnungen sind folgendermassen:

1. Vgl. M. N. **93** (1935) 50; Z. f. Ap. **9** (1935) 267.
2. Um strenge Werte zu ermitteln, multipliziere man die Werte in der Tabelle mit $5.2 \times 10^{12} \left(\frac{A_1}{n_0}\right) \cdot (1-\xi)^{-1}$.

Tabelle I

| $T$ in 1000° | 7.86 | 10.5 | 15.7 | 19.6 | 26.2 | 31.4 | 39.3 | 52.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{n_1}{n_0}$ in $n_e\omega^{-2}$ | $2.0\times10^{-12}$ | $1.0\times10^{-14}$ | $4.7\times10^{-17}$ | $5.2\times10^{-18}$ | $5.4\times10^{-19}$ | $1.7\times10^{-19}$ | $5.1\times10^{-20}$ | $1.5\times10^{-20}$ |

Wenn die Zahl der Atome in den zweiten und höheren Niveaus vernachlässigt wird, so wird der Ionisationszustand der Materie, die sich im thermodynamischen Gleichgewichte mit der verdünnten Strahlung befindet, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{n_1}{n_0}=4\omega^{-2}n_e\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}e^{\frac{h\nu_1}{kT}}.$$

Nach numerischen Rechnungen haben wir die folgenden Ergebnisse:[1]

Tabelle $I_a$

| $T$ in 1000° | 7.86 | 10.5 | 15.7 | 19.6 | 26.2 | 31.4 | 39.3 | 52.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{n_1}{n_0}\right)_{T.Gl.}$ in $n_e\omega^{-12}$ | $2.3\times10^{-12}$ | $1.0\times10^{-14}$ | $3.7\times10^{-17}$ | $3.6\times10^{-18}$ | $3.1\times10^{-19}$ | $8.8\times10^{-20}$ | $2.3\times10^{-20}$ | $5.4\times10^{-21}$ |

Der Vergleich der Tabellen I und $I_a$ zeigt, dass in beiden Fällen die Ionisationen im gleichen Grade stattfinden, so dass es praktisch nicht nötig ist, sie von einander zu unterscheiden. Das bedeutet aber theoretisch nichts anders als eine von W. S. Adams und H. N. Russell[2] gefundene Tatsache, dass sich die Materie in der Sternatmosphäre in bezug auf den Ionisationszustand angenähert in thermodynamischem Gleichgewicht befindet, obgleich das nicht der Fall ist in bezug auf die Atomenverteilung in den Energieniveaus.

§ 23. *Grösse q.* Es ist wohl zweckmässig, hier eine neue Grösse $q$ als das Verhältnis der beiden Glieder auf der linken Seite der Zyklusgleichung (19.3) für $i=2$ einzuführen, nämlich

$$q=\frac{4\pi Q_{12,1}}{n_2B_2J_2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23.1)$$

d. h. $q$ stellt das Verhältnis des $L_\alpha$-Emissionsüberschusses in Quanten zu der Häufigkeit der Ionisationen vom zweiten Niveau aus dar. Angenommen, wie gewöhnlich, $\bar\tau_{12}\gg1$, so ergibt sich aus (13.5$_e$) und (23.1)

$$q=\frac{A_{21}}{\bar\tau_{12}}\frac{4\pi}{B_2J_2}=\frac{4\pi A_{21}}{\omega^2\bar\tau_{12}}\cdot\left(\frac{B_2J_2}{\omega^2}\right)^{-1}, \qquad \ldots\ldots\ldots(23.2)$$

wobei $\frac{B_2J_2}{\omega^2}$ nur eine Funktion der Temperatur ist (vgl. Abb. 2). $q$ ist also proportional dem Verdünnungsfaktor ($4\omega^{-2}$).

1. Hier ist das Resultat mit einen Faktor 2 multipliziert, um die Strahlungsintensität dem durchschnittlichen Zustand der Gashülle anzupassen.

2. Ap. J. **68** (1928) 9.

Um eine andere physikalische Bedeutung von $q$ zu sehen, betrachte man einen besonderen Fall, wo die *Zanstra*sche Rekombinationstheorie angenähert gilt. Da in diesem Fall $\xi \doteqdot \xi_0$ (vgl. § 25) ist, so erhält man aus (13.1), (21.2) und (23.1)

$$\zeta_1 \equiv \frac{\bar{\tau}_{2,3}}{\bar{\tau}_{1,2}} = \frac{1}{q} \times \text{Funktion von } T. \qquad \text{.....(23.3)}$$

$q$ ist also sozusagen massgebend für die Durchsichtigkeit der Gashülle für die Balmerlinien.

Die Verallgemeinerung von (23.1) gibt

$$q_i = \frac{4\pi Q_{[i,1]}}{B_i J_i n_i}, \quad \text{wo } q_2 = q. \qquad \text{.....(23.4)}$$

Setzt man weiter als einen Mittelwert

$$\bar{q} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]}, \qquad \text{.....(23.5)}$$

so erhält man aus (20.4), (21.1), (23.5) eine wichtige Beziehung zwischen $\bar{q}$ und $\xi$, nämlich

$$\frac{\xi}{1-\xi}\left(1 + \frac{1}{\bar{q}}\right) = \frac{\xi_0}{1-\xi_0}. \qquad \text{.....(23.6)}$$

Hieraus folgt, dass die Bedingungen $\xi \to 0$ und $\xi \to \xi_0$ auf $\bar{q} \to 0$ bzw. $q \to \infty$ folglich auch auf $q_i \to 0$ bzw. $q_i \to \infty$ hinauslaufen, denn $\frac{B_j J_j}{4\pi} n_j$ und $Q_{[j,1]}$ müssten sich mit $j$ kontinuierlich ändern. Es sei an dieser Stelle noch zu bemerken, dass, wenn (23.6) auch, streng genommen, eine Beziehung zwischen $\bar{q}$ und $\xi$ ist, sie, wegen der angenäherten Gleichheit $\bar{q} \doteqdot q$ (vgl. § 29), für eine Beziehung zwischen $q$ und $\xi$ gehalten werden darf; in diesem letzteren Sinne wollen wir im folgenden von (23.6) Gebrauch machen.

§ 24. *Grenzfall* $\xi \to 0$, $q \to 0$. Als einen hypothetischen Fall denken wir diesen Fall, der etwa durch eine unendliche Dichte verwirklicht würde. (20.2) wird dann

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = n_0 A_1. \qquad \text{.....(24.1)}$$

Da die Summanden in (21.1) alle positiv sind, erhält man

$$\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} \to 0, \quad Q_{[j,1]} \to 0. \qquad \text{.....(24.2)}$$

Man kann aber aus (13.5$_b$) und (13.5$_c$) unter der Annahme, $\bar{\tau}_{1,i} \geqslant 1$, die folgende Ungleichheit beweisen:

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} Q_{[k,j]} < \frac{n_1}{n_j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}_{kj}}{\tilde{\omega}_{k1}} Q_{[k,1]}.$$

Demnach erhält man aus (24.2) wegen $\frac{\widetilde{\omega}_{kj}}{\widetilde{\omega}_{k1}} < j^{-4}$ (nach (2.1), (2.3)), unabhängig von $j$,

$$Lim_{\xi \to 0} \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_{[k,\,j]} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24.3)$$

wenn die Grössenordnung grösser bei $j^4 n_j$ als bei $j$ selbst ist.

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,\,j]} < \sum_{j=1}^{i-1} \frac{n_i}{n_j} \widetilde{\omega}_{ij} \frac{3}{\mathrm{div}\mathfrak{v}} < Q_{[i,\,1]} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{n_1}{n_j j^4},$$

hieraus folgt nach (24.2), unabhängig von $i$,

$$Lim_{\xi \to 0} \sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,\,j]} = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24.4)$$

Schliesslich reduziert sich (19.3) gemäss (24.3), (24.4) zu

$$\frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24.5)$$

Die Zyklusgleichungen sind also gelöst worden. Wie aus (24.5) leicht zu ersehen ist, wächst $n_j$ logarithmisch mit $j$ zu unendlich, denn $A_j \sim O\left(j^{-3} \log \frac{j^2}{x_1}\right)$ nach Cillié und $B_j J_j \sim O(j^{-3})$ nach (15.4); d. h. die Bedingung für (24.3) und (24.4) ist bestätigt worden.

§ 25. *Grenzfall* $\xi \to \xi_0$, $q \to \infty$. Das entspricht kleiner Dichte oder grosserem Verdünnungsfaktor, wie bei den planetarischen Nebeln. In diesem Fall folgt aus (20.4)

$$\left.\begin{array}{l} Lim_{\xi \to \xi_0} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j \Big/ \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = 0 \\ \text{also} \qquad n_j / n_1 \to 0 \end{array}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25.1)$$

Die Gashülle wird demgemäss transparent für alle Strahlungen anders als die Lymanlinien; folglich ergibt sich aus (19.3) für $i = 2$ wegen (13.6)

$$Q_{[2,1]} = n_0 A_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25.2)$$

woraus $$Q_{[2,1]} > \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25.2_a)$$

Da aber aus (13.5$_e$) unter der Annahme $\bar{\tau}_{1,j} \ll 1$

$$A_{j2} n_j \geqslant Q_{[j,1]}, \quad \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j \geqslant \sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j,\,1]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25.3)$$

folgt, erhält man aus (25.2$_a$)

$$Q_{[2,1]} \geqslant \sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j,\,1]}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25.4)$$

Die Zyklusgleichungen werden nun wegen $q_i \gg 1$ vereinfacht, nämlich, aus (19.3), (19.4) und (20.3), (25.1), (25.3), (25.4) berücksichtigt,

$$\sum_{j=2}^{i-1} A_{ij} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} A_{ji} n_j, \quad \text{für} \quad i \geqq 3, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25.5)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{[2,1]} &= n_0 A_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_i \\ Q_{[2,1]} &= \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \frac{\xi_0}{1-\xi_0} A_1 n_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25.6)$$

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = \sum_{j=1}^{\infty} n_0 A_j. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25.7)$$

Es ist bemerkenswert, dass dieser Fall das von Zanstra zuerst betrachtete Problem darbietet, dass (25.5) in der Tat nichts anders als die Zyklusgleichungen von Cillié sind und die *Zanstra*sche Theorie durch (25.6) formuliert wird.

§ 26. *Formalmanipulationen der allgemeinen Zyklusgleichungen.* Die Methode, wonach Cillié seine Gleichungen (25.5) gelöst hat, ist nicht auf unsere allgemeinen Zyklusgleichungen anwendbar. Aber man kann durch die Einführung der in (26.3) zu definierenden Quantität $\bar{r}_{i+1,\,i}$ diese Gleichungen nach $n_i$ formal lösen.

Wir verallgemeinern nun die Definition von $\zeta_1$ in (23.3) so:

$$\zeta_i \equiv \frac{\bar{\tau}_{i+1,\,i+2}}{\bar{\tau}_{i,\,i+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.1)$$

und setzen weiter

$$Q_{[j,\,i+1]} \equiv r^j_{i+1,\,i}\ \zeta_i^{-1}\ Q_{[j,\,i]}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.2)$$

Wenn man dann einen Mittelwert von $r^j_{i+1,\,i}$ gemäss dem Gesetz

$$\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i+1]} \equiv \bar{r}_{i+1,\,i}\ \zeta_i^{-1} \sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.3)$$

nimmt, so erhält man, indem man $\sum_{i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i+1]}$ und $\sum_{i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i]}$ aus den Zyklusgleichungen für $i$, $i+1$ eliminiert,

$$\begin{aligned} &\left\{1 + \bar{r}_{i+1,\,i}\ \zeta_i^{-1}\right\} Q_{[i+1,\,i]} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ Q_{[i+1,\,j]} - \bar{r}_{i+1,\,i}\ \zeta_i^{-1}\ Q_{[i,\,j]} \right\} \\ &\quad + \frac{B_{i+1} J_{i+1}}{4\pi} n_{i+1} - \bar{r}_{i+1,\,i}\ \zeta_i^{-1} \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i \\ &\quad = A_{i+1} n_0 - \bar{r}_{i+1,\,i} \zeta_i^{-1} A_i n_0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.4) \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält formal nur $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3 \ldots \zeta_i$; wenn nur $\zeta_1$ einmal gegeben wird, so können alle $\zeta_i$ daher berechnet werden. Wir wollen nun (26.4) in eine etwas bequemere Form umschreiben.

Mit Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} r^i_{(j\,!)} &\equiv 1 \cdot r^i_{2,1} \cdot r^i_{3,2} \cdot \ldots \cdot r^i_{j,\,j-1}, \quad r^i_{(1\,!)} \equiv 1 \\ \zeta_{(i\,!)} &\equiv \zeta_1 \zeta_2 \ldots \ldots \zeta_i \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.5)$$

folgt aus (26.1) und (26.2) im allgemeinen

$$Q_{[i,j]} = r^i_{(j\,!)} \zeta^{-1}_{(j-1\,!)} Q_{[i,1]}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26.6)$$

Aus (13.1), (13.5$_e$), (26.1) folgt

$$Q_{[i,1]} = \frac{A_{2,1}}{A_{i+1,\,i}} \cdot \frac{\widetilde{\omega}_{i+1,i} \widetilde{\omega}_{i,1}}{\widetilde{\omega}_{2,1}} \zeta_{(i-1\,!)} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{3} \qquad \ldots\ldots\ldots (26.7)$$

und weiter aus (20.2$_a$) nach (13.1), (23.2)

$$A_1 n_0 = \frac{1-\xi}{q} \cdot \frac{A_{2,1} A_1}{A_{3,2} A_2} \cdot \frac{\widetilde{\omega}_{3,2}}{3} \operatorname{div} \mathfrak{v} \cdot \zeta_{10}, \qquad \ldots\ldots\ldots (26.8)$$

wobei nach (24.5) gesetzt ist

$$\zeta_{10} = \frac{A_{3,2} \widetilde{\omega}_{2,1}}{A_{2,1} \widetilde{\omega}_{13,2}} \cdot \frac{A_2 B_1 J_1}{A_1 B_2 J_2} = \operatorname*{Lim}_{\xi \to 0} \zeta_1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.9)$$

Diese Relationen, in (26.4) eingesetzt, geben nach einigen algebraischen Rechnungen schliesslich

$$\begin{aligned} &\left\{ r^{i+1}_{(i\,!)} + \sum_{j=2}^{i-1} r^{i+1}_{(j\,!)} \frac{\zeta_{(i-1\,!)}}{\zeta_{(j-1\,!)}} + \left(1 + \frac{1}{q_{i+1}}\right) \zeta_{(i-1\,!)} \right\} \cdot \zeta_i^2 \\ &\quad + \left\{ \bar{\tau}_{i+1,\,i}\; r^{i+1}_{(i\,!)} - \frac{1-\xi}{q} C_{i+1,2} \frac{A_{i+1}}{A_2} \zeta_{10} \right\} \cdot \zeta_i \\ &\quad - \bar{\tau}_{i+1,\,i} \left\{ C_{i+1,\,i} \sum_{j=2}^{i-1} r^i_{(j\,!)} \frac{\zeta_{(i-1\,!)}}{\zeta_{(j-1\,!)}} + \left(1 + \frac{1}{q_i}\right) C_{i+1,\,i}\, \zeta_{(i-1\,!)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\xi}{q} C_{i+1,2} \frac{A_i}{A_2} \zeta_{10} \right\} = 0, \quad i \geqq 2, \qquad \ldots\ldots (26.10) \end{aligned}$$

wo

$$C_{i,j} = \frac{A_{i+1,\,i}\; \widetilde{\omega}_{j+1,j}\; \widetilde{\omega}_{j,1}}{A_{j+1,\,j}\; \widetilde{\omega}_{i+1,\,i}\; \widetilde{\omega}_{i,\,1}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26.11)$$

§ 27. *Fall* $\zeta_1 \ll 1$. Die Formel (26.10) kann in dem Fall von ziemlich grossen $\bar{\tau}_{ij}$ am bequemsten behandelt werden. In § 25 wurde berechnet, dass $\bar{\tau}_{2,3} \to 0$, als $q \to \infty$, oder, was dasselbe ist, $\xi \to \xi_0$. Wenn also $q$ ziemlich gross und folglich $\bar{\tau}_{2,3}$ nicht zu merklich ist, so ist es eher zweckmässig, folgendermassen zu manipulieren. Nämlich werden Gleichungen (25.5), (25.6), (25.7) ohne weiteres für den hiesigen Fall gültig, bis auf ganz triviale mathematische Ungenauigkeit, wenn man nur $Q_{[j,i]}$ anstatt $A_{ji}\, n_j$ setzt. Indem man aus diesen Gleichungen für $i$, $i+1$ unmittelbar $\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i]}$, $\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i+1]}$ eliminiert, und dabei

$$S_{i,\,i+1} = \sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i+1]} \Big/ \sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,\,i]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (27.1)$$

$$A'_{ji} = A_{ji} \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27.2)$$

setzt, so erhält man nach (13.1), (13.5$_a$), (25.6)

$$\bar{\tau}_{i+1,i+2}\left\{A'_{i+1,i}S_{i,i+1}+\sum_{j=2}^{i}A'_{i+1,j}\right\}$$
$$-\bar{\tau}_{i,i+1}\frac{\tilde{\omega}_{i+1,i}A_{i+2,i+1}}{\tilde{\omega}_{i+2,i+1}A_{i+1,i}}S_{i,i+1}\sum_{j=2}^{i-1}A'_{i,j}$$
$$=\left\{\frac{A_{i+1}}{\sum_{j=2}^{\infty}A_j}-S_{i,i+1}\frac{A_i}{\sum_{j=2}^{\infty}A_j}\right\}\frac{A_{2,1}A_{i+2,i+1}\tilde{\omega}_{3,2}}{A_{3,2}\tilde{\omega}_{i+2,i+1}}\cdot\zeta_1,$$

.....(27.3)

insbesondere für $i=2$

$$n_3A'_{3,2}(1+S_{2,3})=Q_{[2,1]}S_{2,3}+n_0A_2\left(\frac{A_3}{A_2}-S_{2,3}\right),$$

oder wegen (13.1), (20.3), (25.6)

$$(1+S_{2,3})\bar{\tau}_{3,4}=\frac{\tilde{\omega}_{3,2}A_{4,3}A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{4,3}A_{3,2}A'_{3,2}}\left\{\frac{A_3}{\sum_{j=2}^{\infty}A_j}+S_{2,3}\frac{\sum_{j=3}^{\infty}A_j}{\sum_{j=2}^{\infty}A_j}\right\}\cdot\zeta_1.$$

.....(27.4)

Man kann also der Reihe nach $\bar{\tau}_{3,4}$, $\bar{\tau}_{4,5}$,..... oder $n_3$, $n_4$,..... für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$, $\bar{\tau}_{2,3}$ berechnen. Die Relativintensitäten der Balmerlinien in Quanten werden durch $A'_{i,2}n_i/A'_{4,2}n_4$ gegeben.

§ 28. Um eine Beziehung zwischen $\zeta_1$ und $\xi$ oder $q$ zu ermitteln und damit die formale Behandlung der Zyklusgleichungen vollkommen auszuführen, wenden wir nun die Methode in den vorhergehenden Abschnitten auf die Gleichungen für $i=1$, 2 an; wenn man nämlich, mittels $\bar{r}_{2,1}$, $\sum_{j=3}^{\infty}Q_{[j,1]}$ und $\sum_{j=3}^{\infty}Q_{[j,2]}$ aus ihnen eliminiert, so erhält man nach (20.2$_a$) und (23.1)

$$\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}\right\}\cdot Q_{[2,1]}=\left\{\frac{\xi}{1-\xi}+\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}\frac{A_2}{A_1}\right\}A_1n_0,$$

oder (23.6), (26.7), (26.8) berücksichtigend

$$\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}\right\}\zeta_1=\left\{\frac{\xi_0}{1-\xi_0}\cdot\frac{q}{1+q}+\frac{1}{\bar{r}_{2,1}}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\zeta_1\right\}$$
$$\times\frac{1-\xi}{q}\frac{A_1}{A_2}\zeta_{10}. \qquad .....(28.1)$$

Es ist hier zu bemerken, dass die Gleichung (28.1) im allgemeinen für die Bestimmung von $\zeta_1$ gebraucht wird. Sie gibt in der Tat $\zeta_1=\zeta_{10}$

für $\xi \to 0$ oder $q \to 0$ in Übereinstimmung mit der Definition von $\zeta_{10}$. (Vgl. (26.9)). Dagegen für hinreichend grosse $q$ hat sie eine asymptotische Lösung:

$$\zeta_1 \sim \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\xi_0}{q} \cdot \zeta_{10}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28.2)$$

was nichts anders als der genaue Ausdruck für (23.3) ist.

§ 29. *Annäherungswerte von* $\bar{r}_{i+1,i}$, $S_{i,i+1}$, $\bar{q}$. Diese sind nötig, um die oben ermittelten Formeln praktisch anwenden zu können.

a) $\bar{r}_{i+1,i}$. Es folgt aus (13.1), (13.5a), (26.2)

$$r^j_{i+1,i} = (r^j_{i+1,i})_0 \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{j,i+1}}}{1 - e^{-\bar{\tau}_{j,i}}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.1)$$

wo

$$(r^j_{i+1,i})_0 = \frac{\lambda_{i+2,i+1}\, \tilde{\omega}_{i+1,i}\, \tilde{\omega}_{j,i+1}}{\lambda_{i+1,i}\, \tilde{\omega}_{i+2,i+1}\, \tilde{\omega}_{j,i}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.1a)$$

$(r^j_{i+1,i})_0$ nimmt mit $j$ allmählich zu, um endlich einen Grenzwert zu erreichen. $\bar{r}_{i+1,i}$ wird wegen (26.2), (26.3)

$$\bar{r}_{i+1,i} = \sum_{j=i+2}^{\infty} r^j_{i+1,i}\, Q_{[j,i]} \Big/ \sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i]}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.2)$$

oder nach (13.1), (13.5a), (29.1)

$$\bar{r}_{i+1,i} = \frac{\sum_{j=i+2}^{\infty} (r^j_{i+1,i})_0\, \tilde{\omega}_{j,i}\, n_j (1 - e^{-\bar{\tau}_{i+1,j}})}{\sum_{j=i+2}^{\infty} \tilde{\omega}_{j,i}\, n_j (1 - e^{-\bar{\tau}_{i,j}})}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.3)$$

Wenn man nun berücksichtigt, dass $1 - e^{-\bar{\tau}_{ji}}$ und $\tilde{\omega}_{ji} \to 0$, als $j \to \infty$, für bestimmtes $i$, und dass sich $n_j$ langsam mit $j$ ändert, so erhält man für hinreichend grossen Wert von $\bar{\tau}$ als eine Approximation

$$\bar{r}_{i+1,i} = \sum_{j=i+2}^{N} (r^j_{i+1,i})_0 \tilde{\omega}_{j,i} \Big/ \sum_{j=i+2}^{N} \tilde{\omega}_{j,i}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.4)$$

Wenn man aber, um die Abnahme von $n_j$ mit $j$ noch in Betracht zu ziehen, in (29.2) anstatt $Q_{[j,i]}$ annäherungsweise $A_j$ einsetzt, so erhält man als eine andere Approximation

$$\bar{r}_{i+1,i} = \sum_{j=i+2}^{N} (r^j_{i+1,i})_0 A_j \Big/ \sum_{j=i+2}^{N} A_j. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.5)$$

Nach diesen beiden Formeln sind die Werte von $\bar{r}_{i+1,i}$ berechnet worden; dabei sind die Werte von $A_{ji}$ und $A_j$ aus den Arbeiten von Menzel bzw. von Cillié ($T = 20{,}000°$) entnommen. Die Rechenergebnisse sind folgendermassen:

Tabelle II

| | Berücksichtigt bis zu 8-ten Niveau | | Berücksichtigt bis zu 10-ten Niveau | |
|---|---|---|---|---|
| Gleichung | (29.4) | (29.5) | (29.4) | (29.5) |
| $\bar{r}_{2,1}$ | 0.27 | 0.26 | 0.29 | 0.28 |
| $\bar{r}_{3,2}$ | 0.37 | 0.33 | 0.41 | 0.36 |
| $\bar{r}_{4,3}$ | 0.38 | 0.33 | 0.45 | 0.38 |

Die Werte von $\bar{r}_{i+1,i}$ abgesehen von $\bar{r}_{2,1}$, hängen also sowohl von den alternativen Formeln als auch von der Anzahl der in Betracht gezogenen Zustände ab. Aber wir werden im Teil III die Werte in der vierten Spalte der Tabelle annehmen, welche beinahe gleich den Werten der ersten Spalte sind.

b). $S_{i,i+1}$. Es ergibt sich aus (13.5$_a$), (27.1), (27.2)

$$S_{i,i+1}=\sum_{j=i+2}^{\infty} n_j A'_{j,i+1} \Big/ \sum_{j=i+2}^{\infty} n_j A'_{j,i}. \qquad \text{.....(29.6)}$$

Da $A'_{j,i}$ sich für nicht zu grossen $\bar{\tau}_{ij}$ ungefähr wie $j^{-5}$ ändert, so erhält man im solchen Falle als eine gute Approximation

$$S_{i,i+1}=\sum_{j=i+2}^{N} A'_{j,i+1} \Big/ \sum_{j=i+2}^{N} A'_{j,i} \quad \text{für} \quad \zeta_1 \ll 1, \qquad \text{.....(29.7)}$$

insbesondere für $\bar{\tau}_{ij} \ll 1$

$$S_{i,i+1}=\sum_{j=i+2}^{N} A_{j,i+1} \Big/ \sum_{j=i+2}^{N} A_{j,i}. \qquad \text{.....(29.7}_a\text{)}$$

In der Tat steht das Resultat im Teil III, wo man in (29.7$_a$) die Zustände bis $j=10$ berücksichtigt, mit dem von Cillié bis $j=14$ in Betracht gezogenen Resultat in guter Übereinstimmung.

Wenn $\bar{\tau}_{ij}$ nicht merklich klein ist, so hat man unmittelbar durch (29.7) sukzessiverweise die Werte von $S_{i,i+1}$ zu berechnen.

c). $\bar{q}$. (23.4), (23.5) werden wegen (13.5$_c$), (23.1)

$$\frac{q}{q_i}=\frac{\tilde{\omega}_{2,1}}{\tilde{\omega}_{i,1}} \cdot \frac{B_i J_i}{B_2 J_2}, \qquad \text{.....(29.8)}$$

$$\bar{q}=q \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{\omega}_{j,1}\, n_j \Big/ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{q}{q_j} \tilde{\omega}_{j,1}\, n_j. \qquad \text{.....(29.9)}$$

Hier ändert sich $q/q_j$ mit $j$ kontinuirlich[1] und $\tilde{\omega}_{j,1}$ ungefähr mit $j^{-2}$, und $n_2$ ist gross im Vergleich mit $n_j$ ($j \geqq 3$) (vgl. Tabelle VI, VII), woraus folgt

$$\bar{q}=q. \qquad \text{.....(29.10)}$$

1. Nämlich:

| $\gamma \backslash i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,000 | 1 | 1.19 | 1.16 | 1.10 | 0.95 | 0.88 |
| 30,000 | 1 | .86 | .73 | .64 | .56 | .50 |

## III. Numerische Betrachtungen.

§ 30. *Durchschnittliche Zustände der Gashülle.* In diesem Teil sollen als Anwendung der, im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Theorie die Atomverteilung in den Energieniveaus und die Relativintensitäten der Balmeremissionen numerisch betrachtet werden. Dazu betrachten wir zunächst die Beziehungen zwischen dem in der Theorie eine wichtige Rolle spielenden Parameter $q$ einerseits, und den durchschnittlichen Werten einiger physikalischen Grössen in der Gashülle andererseits.

Gegeben sind bei unserem Problem die Sterntemperatur und die optischdurchschnittlichen Werte der Dichte, der Dimension, des Verdünnungsfaktors und der Divergenz der Geschwindigkeit. Aber nur vier Grössen von ihnen sind unabhängig, denn (14.1) gibt längs eines Radius $\bar{\tau}_1=\int\tau_1 e^{-\tau_1}d\tau_1=1$ für die $J_1$-Strahlung. Diese Bedingung läuft angenähert auf

$$\bar{\tau}_1=\alpha_1 n_1 R\omega^{-1}=1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30.1)$$

wo $R$ den Sternradius bedeutet.

Wenn man einfachheitshalber $\mathrm{div}\,\mathfrak{v}=3\frac{V}{r}$ (was $V\propto r$ entspricht) annimmt, so folgt aus (13.1)

$$\bar{\tau}_{1,2}=\frac{cn_1\bar{\alpha}_{1,2}R}{V\omega}=\frac{A_{2,1}n_1R}{\tilde{\omega}_{2,1}V\omega}.$$

Dann ergibt sich wegen (30.1)

$$\bar{\tau}_{1,2}=\frac{A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{2,1}\alpha_1 V}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30.2)$$

Indem man $\bar{\tau}_{1,2}$ aus (23.2) und (30.2) eliminiert, erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2 q=f_1(T,V)=V\phi_1(T),\\ \text{wo}\quad&\phi_1(T)=4\pi\tilde{\omega}_{2,1}\alpha_1\left(\frac{B_2J_2}{\omega_2}\right)^{-1}\end{aligned}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30.3)$$

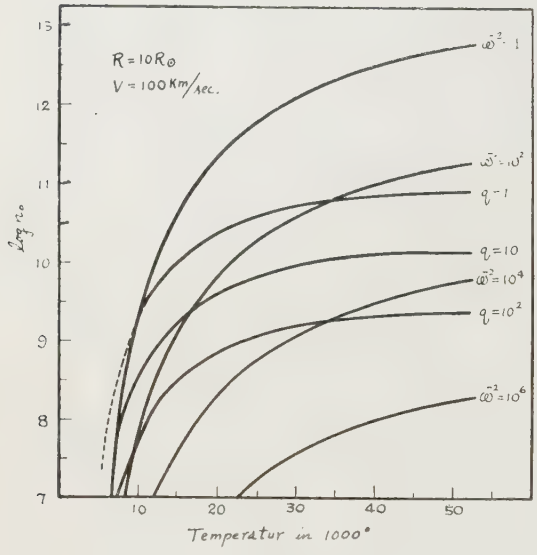
In ähnlicher Weise ergibt sich aus (20.2$_a$), (30.1), (30.3)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q^{3/2}n_0^2}{1-\xi}=f_2(T,R,V)=\frac{V^{3/2}}{R}\phi_2(T),\\ \text{wo}\quad&\phi_2(T)=\tilde{\omega}_{2,1}^{\frac{3}{2}}(4\pi\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A_1}{n_0}\right)^{-1}\left(\frac{B_1J_1}{\omega^2}\right)\left(\frac{B_2J_2}{\omega^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\right\}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30.4)$$

Die Quantität $1-\xi$ in (30.4) ändert sich nur um etwa $\frac{1}{2}$; d. h. nimmt von 1 bis $\frac{1}{2}$ ab, als $\xi$ von 0 zu $\xi_0$ wächst. Wenn man also annäherungsweise $\xi=\frac{1}{2}\xi_0$ setzt, so kann man mittels (30.3), (30.4) für gegebene $R$ und $V$ die Grössen $\omega^2$, $n_0$ als Funktionen von $T$, $q$ numerisch berechnen. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Abb. 3 veranschaulicht; dabei sind $R=10\cdot R_\odot$, $V=100$ km/sec angenommen, was etwa bei den $Be$-Sternen verwirklicht würden.

Abb. 3




Die Kurve $\omega=1$ in Abb. 3 stellt die Grenze des Spielraums der Quantitäten dar. Die entsprechenden Werte von $q$ (sei $=q_0$) und $T$ sind folgendermassen:

Tabelle III

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ in 1000° | 5.24 | 7.86 | 10.5 | 15.7 | 19.6 | 26.2 | 31.4 | 39.3 | 52.4 |
| $q_0/V$ in 100 km/sec | 61 | 3.3 | .71 | .13 | .057 | .023 | .0133 | .0072 | .0032 |

Wie Tabelle III zeigt, besitzt $q$ für $B_e$-Sterne eine kleine aber doch nicht verschwindende untere Grenze. Der Fall $q=0$ kann demgemäss nur hypothetisch verwirklicht werden.

§ 31. *Änderung von $\zeta_1$ im Verlauf $q=0\to\infty$.* Damit man sehen kann, wie die Zustände der Gashülle die mittlere optische Gesamtlänge beeinflusst, sind die Werte von $\zeta_1$ mittels $M(i,T)$ von Cillié und $\bar{r}_{2,1}$ in der vierten Spalte der Tabelle II aus (23.6) und (28.1) berechnet worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle IV zusammengestellt, wo die Werte von $\xi$ auch gegeben sind.

Tabelle IV

| | 10,500° | | 15,700° | | 19,600° | | 26,200° | | 31,400° | | 39.300° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | $\xi$ | $\zeta_1$ | $\xi$ | $\zeta_1$ | $\xi$ | $\zeta_1$ | $\xi$ | $\zeta_1$ | $\xi$ | $\zeta_1$ | $\xi$ | $\zeta_1$ |
| 0 | | $2.20 \times 10^{-4}$ | | $8.9 \times 10^{-3}$ | | .039 | | .158 | | .32 | | .63 |
| | | | | | (.054 | .057 .048) | (.021 | .023 .16) | (.012 | .013 .32) | ($q_0$=.0061 | .0072 .59) |
| 0.1 | | | .11 | .013 .014) | .087 | .050 | .080 | .16 | .077 | .30 | .072 | .57 |
| 0.2 | | | .15 | .014 | .15 | .049 | .14 | .15 | .13 | .28 | .12 | .52 |
| 0.5 | .33 | $q_0$=.71 2.3 $\times 10^{-4}$ | .27 | .011 | .26 | .040 | .24 | .13 | .24 | .23 | .44 .22 | .41 |
| 1 | .37 | 1.8 | .35 | $6.9 \times 10^{-3}$ | .34 | .029 | .33 | .10 | .32 .32 | .18 | .30 | .32 |
| 2 | .44 | 1.1 | .42 | 4.4 | .41 | .018 | .20 .39 | .070 | .38 | .13 | .36 | .22 |
| 4 | .48 | .59 | .46 | 2.5 | .11 .45 | .010 | .44 | .041 | .42 | .078 | .41 | .14 |
| 6 | .50 | .41 | .48 | 1.7 | .47 | $7.4 \times 10^{-3}$ | .45 | .028 | .44 | .057 | .42 | .10 |
| 8 | .51 | .31 | .49 | 1.3 | .48 | 5.6 | .46 | .023 | .45 | .044 | .43 | .083 |
| 10 | .05 .52 | .25 $\times 10^{-4}$ | .05 .50 | $1.1 \times 10^{-3}$ | .49 | $4.5 \times 10^{-3}$ | .47 | .019 | .46 | .037 | .44 | .069 |
| 100 | .54 | $2.6 \times 10^{-6}$ | .52 | $1.1 \times 10^{-4}$ | .51 | $4.8 \times 10^{-4}$ | .49 | $2.0 \times 10^{-3}$ | .48 | $3.6 \times 01^{-3}$ | .46 | $8.1 \times 10^{-3}$ |
| ∞ | .54 | | .52 | | .51 | | .49 | | .48 | | .46 | |

Die in Klammern stehenden Zahlen in der Tabelle sind $q_0$ und die entsprechenden Grenzwerte von $\xi$, $\zeta_1$. Der Verdünnungsfaktor $4\omega^{-2}$ wird nach (30.3) berechnet durch

$$\omega^2 = q_0/q. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31.1)$$

Die Grenze $\omega^{-2}=100$ findet an den durch schwarze Linienstrecke gekennzeichneten Stellen statt. Die bei $q=0$ stehenden Zahlen in Tabelle IV stellen die aus (26.9) berechneten Grenzwerte $\zeta_1$, nämlich $\zeta_{10}$ dar.

Die Werte von $\alpha_1$ in Abb. 2 und $\frac{A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{2,1}} = 1.36 \times 10^{-7}$ geben nach (30.2) die Werte von

$$\bar{\tau}_{1,2} \times V \text{ (in 100 km/sec)}$$

| $T$ in 1000° | 5.24 | 10.5 | 19.6 | 31.4 | 52.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1900 | 2100 | 2600 | 3400 | 4900. |

Diese Zahlen geben nur die Grössenordnung von $\bar{\tau}_{1,2}$ wegen der Annäherung (30.1). Der Vergleich dieser mit der Tabelle IV zeigt, dass

sich die Grössen $\zeta_1$ sowie $\bar{\tau}_{2,3}$ allmählich Null nähern, als $q\to\infty$, wenn sie auch mit der Temperatur zunehmen. Z. B. für $\omega^{-2}=100$ sieht man, dass $\bar{\tau}_{2,3}$ etwa bei 15,000° etwas merklich zu werden beginnt, und bei 25,000° Grössenordnung von 100 erreicht. Wenn man dagegen, wie üblich, $\omega^{-2}\sim 10^4$, $10^5$ bei $B_e$-Sternen annimmt, so darf man ihren Gashüllen Durchsichtigkeit von ziemlich hohen Grade zuschreiben.

§ 32. *Kontinuierliche Absorption an der Balmergrenze.* Das Verhältnis der Häufigkeit der Ionisationen von den Zuständen $i\geqq 2$ zu der der von Grundzustande wird nach (20.4), (23.6) gegeben durch

$$\sum_{j=2}^{\infty} B_j J_j n_j \Big/ B_1 J_1 n_1 = \xi/q.$$

Die Werte dieses Verhältnisses für die gerade bei der Grenze $\omega^{-2}=100$ stehenden Werte von $q$ in Tabelle IV sind dort nebenbei in Italik gegeben. Es beträgt z. B. 0.12 für 20,000°: die Ionisationen finden also bei den $B_e$-Sternen ziemlich häufig vom zweiten Zustande aus statt. Aber das bedeutet nicht immer, dass sie gewaltige kontinuierliche Absorption an der Balmergrenze verursachen können. Die Bedingung dafür ist in der Tat

$$Q_{[2]}\equiv n_0 A_2 - \frac{B_2 J_2}{4\pi} n_2 \leqq 0. \qquad \text{.....(32.1)}$$

Da aber nach (13.1), (20.2$_a$) und (26.9)

$$Q_{[2]}=\left\{1-\frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{\zeta_1}{\zeta_{10}}\right\}A_2 n_0 \qquad \text{.....(32.2)}$$

ist, so gibt (32.1)

$$\zeta_1 \geqq (1-\xi)\zeta_{10}. \qquad \text{.....(32.3)}$$

Das Gleichsetzen beider Seiten von (32.3) bestimmt drei kritische Werte von $q$, nämlich aus (28,1)

$$q_k=0 \quad \text{und} \quad 1+q_k=\frac{\sum_{j=2}^{\infty} A_j}{A_2}\left\{1+\frac{\zeta_{10}}{\bar{\tau}_{2,1}}(1-\xi_k)\right\}^{-1}, \qquad \text{.....(32.4)}$$

einer ist negativ und hat keinen Sinn, die anderen beiden o und $q_k>0$ bestimmen das Gebiet der kontinuierliche Absorption. Die Werte von $q_k$ für jede Temperatur werden nach (23.6) und (32.4) berechnet, nämlich

| Temp. | 15,700° | 19,600° | 26,200° | 31,400° |
|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | 1.5 | 1.3 | 0.81 | 0.28 |
| $\omega^{-2}$ | 12 | 23 | 35 | 22. |

Diese Resultate können auch unmittelbar nach (32.3) mittels der in Tabelle IV gegebenen Werte von $\zeta_1$, $\xi$, $\zeta_{10}$ bestätigt werden. Wie man

sieht, findet die kontinuierliche Absorption nur bei den *Be*-Sternen mit kleinen Verdünnungsfaktoren statt.

§ 33. *Gesamtquanten von Balmeremissionen und kontinuierliche Emissionen an der Balmergrenze.* Indem man aus den Zyklusgleichungen für $i=1, 2$ $Q_{[2,1]}$ eliminiert und (20.2$_a$), (23.6), (26.3) berücksichtigt, erhält man für die Gesamtquanten von Balmeremissionen den Ausdruck:

$$\sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j,2]} = \frac{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{q}\right)\xi}{1+\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}\left(1+\frac{1}{q}\right)} \cdot \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33.1)$$

Also wird das Verhältnis $\gamma_B$ der Gesamtquanten der von der ganzen Gashülle aus herstammenden Balmeremissionen zu den der Ultravioletten-quanten der Sternstrahlung[1] gegeben durch

$$\gamma_B = \frac{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \cdot \frac{(1+q)\xi}{q+\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}(1+q)} \cdot \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33.2)$$

In ähnlicher Weise erhält man für das Verhältnis $\gamma_K$ der Gesamtzahl der Quanten der kontinuierlichen Emissionen zu der der Balmeremissionen wegen (13.1), (20.2$_a$), (23.6), (32.2), (33.1)

$$\gamma_K = \left\{1-\frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{\zeta_1}{\zeta_{10}}\right\}\left\{1+\frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}\cdot\frac{1+q}{q}\right\}\cdot\frac{A_2}{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33.3)$$

Insbesondere, falls $q \gg 1$

$$\gamma_B = \sum_{j=3}^{\infty} A_j \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \gamma_K = A_2 \Big/ \sum_{j=3}^{\infty} A_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (33.4)$$

und falls $q \ll 1$

$$\gamma_B \sim \frac{\bar{r}_{2,1}\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\zeta_{10}\sum_{j=2}^{\infty} A_j}\cdot\xi, \quad \gamma_K = \frac{\zeta_{10} A_2}{\bar{r}_{2,1}\sum_{j=3}^{\infty} A_j} - 1. \qquad \ldots\ldots (33.5)$$

$\gamma_B$ und $\gamma_K$ werden üblich für die Konstanten gehalten, welche den Werten von (33.4) gleich sind, aber sind sie in Wirklichkeit nicht konstant, sondern veränderlich. Diese Verhältnisse sind in der Tabelle V zu sehen.

---

1 Das Verhältnis der Gesamtquanten der Balmeremissionen zu den der in der ganzen Gashülle zu absorbierenden Ultravioletten-quanten ist gleich $\gamma_B/\xi$, weil sie nach (33.1) durch $\int \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 do$ gegeben wird, wo $do$ das Volumenelement bedeutet.

Tabelle V $\gamma/(\gamma)_{q=\infty}$

| | $q$ | 0 | 0.1 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 10 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19,600° | $\gamma_R$ | 0 | 0.63 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.0 | 1.0 |
| | $\gamma_K$ | −0.9 | −1.2 | −0.56 | −0.15 | 0.23 | 0.54 | 0.76 | 1.0 |
| 31,400° | $\gamma_R$ | 0 | 0.15 | 0.46 | 0.58 | 0.70 | 0.81 | 0.92 | 1.0 |
| | $\gamma_K$ | −0.2 | −0.8 | 0.2 | 0.41 | 0.58 | 0.79 | 0.85 | 1.0 |

§ 34. *Relativintensitäten der Balmeremissionen.* Man hat mittels der Werte von $\zeta_1$, $\xi$ in Tabelle IV erstens die Werte von $\zeta_2$, $\zeta_3$ zu berechnen, damit man die Relativintensität $H_\alpha/H_\beta$ in Quanten abschätzen kann.

1) *Fall* $\bar{\tau}_{2,3} \gg 1$. In diesem Fall kann man am bequemsten von (26.10) Gebrauch machen, welche für $i=2, 3$ lautet:

$$\left\{1+\frac{1}{\bar{r}^3_{2,1}}\left(1+\frac{1}{q_3}\right)\zeta_1\right\}\cdot\zeta_2^2 - \left\{\frac{A_3\,\tilde{\omega}_{3,2}\,A_{4,3}\,A_{2,1}}{A_2\tilde{\omega}_{4,3}\,A^2_{3,2}}\cdot\frac{1-\xi}{q}\zeta_{10}-\bar{r}_{3,2}\right\}\cdot\zeta_2 - \bar{r}_{3,2}\left\{\left(1+\frac{1}{q}\right)\zeta_1-\frac{1-\xi}{q}\zeta_{10}\right\}\frac{\tilde{\omega}_{3,2}\,A_{4,3}\,A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{4,3}\,A^2_{3,2}}=0 \qquad \text{.....(34.1)}$$

$$\left[1+\left\{1+\frac{1}{\bar{r}^4_{2,1}}\left(1+\frac{1}{q_4}\right)\zeta_1\right\}\frac{\zeta_2}{\bar{r}^4_{3,2}}\right]\cdot\zeta_3^2 - \left[\frac{A_4\,\tilde{\omega}_{3,2}\,A_{5,4}\,A_{2,1}}{A_2\,\tilde{\omega}_{5,4}\,A_{3,2}\,A_{4,3}}\cdot\frac{1-\xi}{q}\zeta_{10}-\bar{r}_{4,3}\right]\cdot\zeta_3 - \bar{r}_{4,3}\frac{\tilde{\omega}_{3,2}\,A_{5,4}\,A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{5,4}\,A_{3,2}\,A_{4,3}}\left[\left\{1+\frac{1}{\bar{r}^3_{2,1}}\left(1+\frac{1}{q_3}\right)\zeta_1\right\}\times\frac{A^2_{3,2}\,\tilde{\omega}_{4,3}}{A_{4,3}\,A_{2,1}\,\tilde{\omega}_{3,2}}\zeta_2-\frac{A_3}{A_2}\frac{1-\xi}{q}\zeta_{10}\right]=0, \qquad \text{.....(34.2)}$$

woraus $\zeta_2$ und $\zeta_3$ berechnet werden. Dann erhält man nach (13.1), (13.5)

$$\frac{H_\alpha}{H_\beta}=\frac{\tilde{\omega}_{3,2}\,\tilde{\omega}_{4,3}\,A_{5,4}}{\tilde{\omega}_{4,2}\,\tilde{\omega}_{5,4}\,A_{4,3}}\cdot\frac{1-\frac{2^2}{4^2}\frac{n_4}{n_2}}{1-\frac{2^2}{3^2}\frac{n_3}{n_2}}\cdot\zeta_3^{-1}$$

$$= \frac{1.92}{\zeta_3} \cdot \frac{1 - \frac{n_4}{4n_2}}{1 - \frac{4n_3}{9n_2}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34.3)^1$$

denn $H_\alpha/H_\beta$ in Quanten ausgedrückt muss $Q_{[3,2]}/Q_{[4,2]}$ gleich sein.

Hier wird das Verhältnis $n_{i+1}/n_i$ wegen (13.1) berechnet durch

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{A_{i+1,i}\,\tilde{\omega}_{i+2,i+1}}{A_{i+2,i+1}\,\tilde{\omega}_{i+1,i}} \cdot \zeta_i, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34.4)$$

wobei der Koeffizient 0.120, 0.267 bzw. 0.376 zu setzen ist, je nachdem $i = 1$, 2 bzw. 3 ist. Die Rechenergebnisse sind wie in Tabelle VI.

Tabelle VI

$T = 31{,}400°$

| $q_0$ | 0 | $q_0 = .013$ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_2$ | 3.2 | 3.1 | 2.8 | 2.5 | 2.0 | 1.50 | 1.18 | .86 | .69 | .58 | .50 |
| $n_3/n_2$ | .85 | .83 | .73 | .65 | .52 | .40 | .32 | .23 | .18 | .16 | .13 |
| $\zeta_3$ | 2.8 | 2.8 | 2.5 | 2.3 | 1.96 | 1.65 | 1.32 | 1.08 | .97 | .88 | .85 |
| $n_4/n_3$ | 1.06 | 1.05 | .95 | .88 | .74 | .62 | .50 | .41 | .37 | .33 | .32 |
| $H\alpha/H\beta$ | .85 | .86 | .94 | .99 | 1.15 | 1.33 | 1.63 | 1.93 | 2.1 | 2.3 | 2.4 |

$T = 26.200°$

| $q_0$ | | $q_0 = .023$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_2$ | 2.7 | 2.6 | 2.2 | 1.94 | 1.53 | 1.19 | .88 | .59 | .44 | .38 | .32 |
| $n_3/n_2$ | .73 | .67 | .59 | .52 | .41 | .32 | .23 | .16 | .12 | .10 | .08 |
| $\zeta_3$ | 2.6 | 2.5 | 2.3 | 2.1 | 1.65 | 1.35 | 1.10 | .91 | .81 | .76 | .72 |
| $n_4/n_3$ | .99 | .95 | .86 | .78 | .62 | .51 | .41 | .34 | .30 | .28 | .27 |
| $H\alpha/H\beta$ | .88 | .88 | 1.00 | 1.09 | 1.34 | 1.59 | 1.90 | 2.2 | 2.5 | 2.6 | 2.8 |

$T = 19{,}600°$

| $q_0$ | | $q_0 = .057$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_2$ | 2.3 | 1.84 | 1.63 | 1.36 | 0.95 | 0.65 | 0.40 |
| $n_3/n_2$ | .61 | .49 | .44 | .36 | .21 | .16 | .11 |
| $\zeta_3$ | 2.5 | 1.86 | 1.70 | 1.45 | 1.15 | .93 | .76 |
| $n_4/n_3$ | .92 | .70 | .64 | .55 | .43 | .35 | .29 |
| $H\alpha/H\beta$ | .93 | 1.21 | 1.30 | 1.50 | 1.83 | 2.2 | 2.6 |

1. Die erzwungenen Emissionsübergänge sind berücksichtigt worden, denn ihre Beiträge zu den Emissionsüberschüsse $Q_{[3,2]}$, $Q_{[4,2]}$ selbst werden beträchtlich, falls $q \lesssim 1$. (Vgl S. 115).

2) *Fall* $\zeta_1 \ll 1$. In diesem Falle werden $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$..... mittels (28.2), (27.4), (27.3) für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$ $q$ berechnet. Da aber solche Rechnungen praktisch kompliziert sind, haben wir umgekehrt $\zeta_2$, $\zeta_3$..... und $q$ für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$ und $\zeta_1$ berechnet, nämlich, $\zeta_2$, $\zeta_3$..... aus (27.4), (27.3) und $q$ aus (28.2); dabei $S_{i,i+1}$ nach den sukzessiven Approximationen ermittelt. Die Ergebnisse stehen in Tabelle VII, dabei $T=20{,}000°$ und dementsprechend beinahe $\bar{\tau}_{1,2}=2{,}500$ (vgl. S. 129) angenommen, und die Energieniveaus bis zu $i=10$ in Betracht gezogen.

Tabelle VII

$T=20{,}000°$ $\bar{\tau}_{1,2}=2{,}500$

| $\bar{\tau}_{2,3}$ | $q$ | $\zeta_2$ | $n_3/n_2$ | $\zeta_3$ | $n_4/n_3$ | $H_\alpha/H_\beta$ | $\bar{r}_{3,2}$ | $\bar{r}_{4,3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 3.0 | .25 | .067 | .61 | .23 | 3.2 | .21 | .38 |
| 20 | 6.2 | .132 | .035 | .44 | .17 | 4.7 | .14 | .39 |
| 10 | 13 | .069 | .019 | .50 | .19 | 5.1 | .08 | .51 |
| 5 | 26 | .035 | .009 | .85 | .32 | 4.5 | .04 | .93 |
| 2 | 62 | .016 | .004 | 1.67 | .63 | 4.1 | .02 | 1.85 |
| 1 | 120 | .011 | .003 | 2.4 | .89 | 4.0 | | 2.7 |
| 0.5 | 240 | .009 | .002 | 2.9 | 1.11 | 3.87 | | 3.2 |
| 0 | $\infty$ | .007 | .002 | 3.62 | 1.36 | 3.85 | | 4.0 |

Die Werte der Grösse $\bar{r}_{i+1,i}$ sind nach ihrer Definition (26.3) mittels der hier ermittelten Werte von $S_{i,i+1}$ berechnet worden. Die Zahlen in den letzten beiden Spalten in Tabelle VII zeigen, dass, wenn $q$ abnimmt, sich $\bar{r}_{i+1,i}$ allmählich den in Tabelle II gegebenen Werten nähert, die wir für ziemlich kleine $q$ vorausgesetzt haben, und dass, bei den Temperaturen niedriger als 19,600°, die Annäherungslösungen in dem vorhergehenden Paragraphen nicht mehr für grössere $q$ als eins angenommen werden kann.

3) *Fall* $q\to\infty$. Die allgemeine Zyklusgleichung läuft auf die von Gillié hinaus. Da aber die Lösungsmethode ganz anderes als die von Cillié ist, so wird es auch interessant sein, die beiden Resultaten hier zu vergleichen: nämlich

Relativintensitäten in Energie.

| $T=20.000°$ | | $H_\alpha$ | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| Cillié | I | 2.91 | 1.00 | 0.46 |
| | II | 2.88 | 1.00 | 0.48 |
| Kurihara | | 2.85 | 1.00 | 0.48 |

In I und II hat Cillié die Energieniveaus bis zu $i=7$ bzw. $i=14$ in Betracht gezogen. Unser Resultat steht mit den Fällen von Cillié in Übereinstimmung und insbesondere schön mit dem Fall II.

4) *Fall* $\xi\to 0$. Die Relativintensitäten der Balmeremissionen sind aus

$$\frac{Q_{[j,2]}}{Q_{[4,2]}}=\frac{\tilde{\omega}_{j,2}\,n_j}{\tilde{\omega}_{4,2}\,n_4}\cdot\frac{1-\dfrac{n_4}{4n_2}}{1-\dfrac{2^2\,n_j}{j^2\,n_2}},\quad \text{wegen (13.1), (13,5),}$$

berechnet worden, dabei $n_j/n_i$ durch (24.5) bestimmt worden sind. Das Resultat ist folgendermassen:

Tabelle VIII

| | $i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,000° | $n_i/n_{i-1}$ | 0.0052 | 0.61 | 0.94 | 1.0 |
| | $\zeta_{i-1}$ | 0.043 | 2.3 | 2.5 | 2.2 |
| | | $H_\alpha=0.90$ | $H_\beta=1.00$ | | $H_\gamma=0.85$ |
| 50,000° | $n_i/n_{i-1}$ | 0.13 | 1.0 | 1.1 | 1.1 |
| | $\zeta_{i-1}$ | 1.0 | 3.9 | 3.0 | 2.4 |
| | | $H_\alpha=0.87$ | $H_\beta=1.00$ | | $H_\gamma=0.69$ |

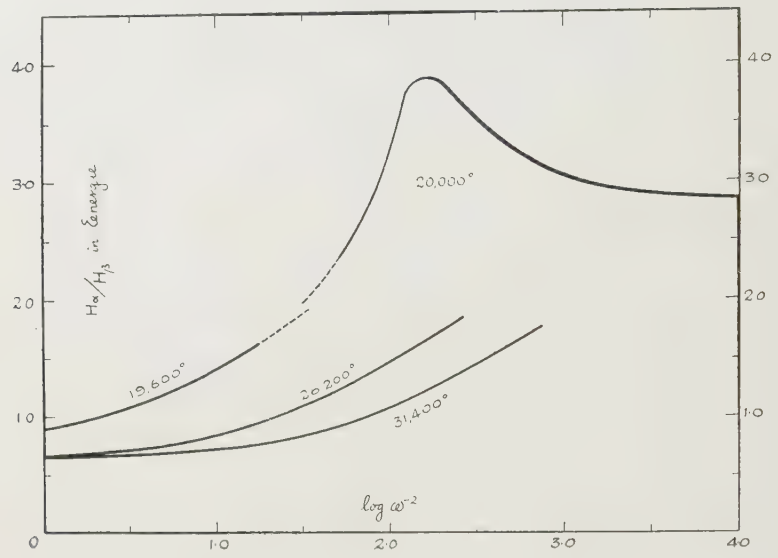
Die obigen Ergebnisse für $H_\alpha/H_\beta$ sind in Abb. 4 veranschaulicht. Hier ist die Relativintensität nicht in Quanten, sondern vielmehr in Energie ausgedrückt (das kann leicht dadurch getan werden, dass man $H_\alpha/H_\beta$ und $H_\gamma/H_\beta$..... mit 0.741 bzw. 1.12..... multipliziert). Die Geschwindigkeit ist vorläufig als 100 km/sec angenommen.

Unsere numerischen Ergebnisse sind im allgemeinen gültig, solange man $T$ und $q$ als unabhängige Variablen betrachtet. Wenn man aber $\omega^2$ als das Argument einführen will, damit man sie mit den Beobachtungen vergleichen kann, so kann man nicht umhin einige Annahmen in bezug auf die Gashülle zu machen, um $q$ und $\omega^2$ in eine bestimmten Beziehung zu bringen. Was den Sternradius sowie die Geschwindigkeit anbetrifft, kann man freilich durch (31.1), (30.4) mittels der Werte von $q_0$ in Tabelle III passende Verbesserungen machen.

§ 35. *Diskussionen.* Die Grenze $q\to 0$ ist besonders bemerkenswert, weil, wie die Tabelle VIII zeigt, $H_\alpha$, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fällen, schwächer als $H_\beta$ ist. $H_\alpha/H_\beta$ nimmt mit $q$ zu und zwar um so stärker, je niedriger die Temperatur ist, nimmt aber allmäh-

lich wieder ab, wenn $q$ über einen gewissen Wert wächst, um sich letzten Endes einem $\xi \to \xi_0$ entsprechenden Wert asymptotisch zu nähern. (Vgl. Abb. 4).

Abb. 4




Diese Verhältnisse lassen sich wohl dadurch erklären, dass das Elektron im 4-Zustande zu dem Emissionsüberschuss entweder durch den $4 \to 3$ oder durch den $4 \to 2$ Übergang beizutragen vermag, dass dagegen das Elektron im 3-Zustande es nur durch den einzigen Übergang $3 \to 2$[1] tut: Da die Anzahlen der von oben zu diesen beiden Zustände übergehenden Elektronen sind grössenordnungsmässig zu $A_4 n_0$ bzw. $A_3 n_0$ gleich sind, darf man das Verhältnis $\dfrac{Q_{[4,3]} + Q_{[4,2]}}{Q_{[3,2]}}$ beinahe als eine Konstante unabhängig von $q$ ansehen. Das Verhältnis $Q_{[4,2]}/Q_{[3,2]}$, oder $H_\beta/H_\alpha$, nimmt also zu oder ab, je nachdem die $4 \to 2$ Übergänge häufiger als die $4 \to 3$ stattfinden oder umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit für die ersteren Übergänge wird durch

$$A_{4,2}\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{2,4}}}{\bar{\tau}_{2,4}} \Big/ \left\{ A_{4,2}\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{2,4}}}{\bar{\tau}_{2,4}} + A_{4,3}\frac{1-e^{-\bar{\tau}_{3,4}}}{\bar{\tau}_{3,4}} \right\}$$

gegeben. Diese Wahrscheinlichkeit, von $q=o$ an zuerst allmählich abnehmend, erreicht einen minimalen Wert, nimmt dann wieder zu,

1. Der Einfachheit halber sind die Übergänge $4 \to 1$ und $3 \to 1$ wegen der Kompensierung der entgegengesetzten Vorgänge ausser acht gelassen worden.

um endlich einem Grenzwert $A_{4,2}/A_{4,2}+A_{4,3}$ nahezukommen, denn $\bar{\tau}_{3,4}$ wird durch die Änderung von $q$ am empfindlichsten beeinflusst. Das Verhältnis $H_\beta/H_\alpha$ hat einen Minimumwert und konvergiert gegen eine bestimmte Grenze. Auf diese Weise ist der oben erwähnte Verlauf von $H_\alpha/H_\beta$ erklärt worden.

Es ist hier wohl interessant zu bemerken, dass zwei Werte des Verdünnungsfaktors ($4\,\omega^{-2}$) für einen und denselben Wert von der Relativintensität $H_\alpha/H_\beta$ entsprechen, wenn er grösser als der *Cillié*sche Wert ist. Das muss bei der Untersuchung von *Be*-Sternen vorsichtig berücksichtigt werden; man kann z. B. nicht vorschnell der Gashülle einen grossen Verdünnungsfaktor zuschreiben, wenn ihr Spektrum etwa solches Dekrement der Balmeremissionen, wie das *Cillié*sche, zeigt.

Wenn sich die Gashülle bei den *Be*-Sternen im Bewegungszustande befindet, und wenn sie für die Balmerlinien ziemlich undurchsichtig ist, so ist es aus Abb. 3, 4 sehr naheliegend, dass man bei den *Be*-Sternen eher Verdünnungsfaktor $\leqq 400$ ($\omega^{-2} \leqq 100$) und Dichte $\geqq 10^{-14}$ deshalb annehmen müsste, weil diese Sterne, wie man unten sehen wird, meistenfalls relative Intensitäten kleiner als bei Cillié zeigen. Diese Abschätzung des Verdünnungsfaktors ist viel kleiner als heute von den meisten Forschern angenommen wird; es war jedoch der Fall bei Nova Herculis im Jahr 1934.

§ 36. Nova Herculis wurde am 13. Dezember 1934 entdeckt. Gerade nach dem Lichtausbruch war $H_\alpha/H_\beta$ ausserordentlich klein, vergrösserte sich aber nachher allmählich. Diese allmähliche Vergrösserung bedeutet nichts anderes als eine kräftige Bestätigung unserer Theorie. Nach den Beobachtungen von E. G. Williams,[1] Greaves und Martin[2] beträgt $H_\alpha/H_\beta$ im Mittel 1.59 in Energie oder 2.15 in Quanten in der Periode von der Entdeckung bis 18.8 Dez. Die *Cillié*sche Theorie gibt dagegen 2.88 bzw. 3.89 für $T=20{,}000$.[3] Dieser beobachtete Wert entspricht aber einem sehr kleinen Verdünnungsfaktor. Wenn man, um weiter zu sehen, vorläufig das *Williams*sche Modell annimmt, so erhält man $\omega^{-2}=29$ im Mittel für sechs innere Schalen, von der äussersten abgesehen.[3]

---

1. M. N. **97** (1937) 612.
2. M. N. **96** (1936) 425.
3. Mit $H_\alpha/H_\beta=2.15$, $V=330$ km/sec und $\omega^{-2}=29$ gerechnet, wird die Temperatur dieses Sternes etwa 23,000°, während seine Farbtemperatur nach Beobachtungen 11,000° ist. Der grosse Unterschied dieser beiden wird wohl auf die Tatsache zurückgeführt, dass die Strahlung im Ultraviolett aussergewöhnlich stark im Vergleich mit dem *Planck*schen Gesetz ist.

§ 37. In bezug auf die $Be$-Sterne haben wir aus den Beobachtungsangaben von O. Mohler[1] und B. G. Karpov[2] die folgenden:

$H_\alpha/H_\beta$ in Quanten

| | $\gamma$ Cas | $\psi$ Per | $Be$-Sterne |
|---|---|---|---|
| Mohler | 2.3 | 3.4 | 2.79 (11) |
| Karpov | 3.6 | 4.3 | 3.90 (12) |
| Mittel | 3.0 | 3.9 | 3.35 (23) |

Der Unterschied der Ergebnisse der beiden Forscher wird vielleicht auf den verschiedenen Behandlungsweisen der Beobachtungen beruhen. $\gamma$ Cas und $\psi$ Per sind die stärkste Emissionen zeigenden Sterne; sie besitzen nach Mohler gleiche Temperatur 18,700°, so dass man annäherungsweise aus der Kurve für $T=19{,}600°$ in Abb. 4 erhält

| für | $\gamma$ Cas | $\psi$ Per | $Be$-Sterne (23) |
|---|---|---|---|
| $\omega^{-2}$ | 42 | 79 | 56. |

Wenn man eine noch niedrigere Temperatur annimmt, so werden diese Werte etwas verkleinert; wenn man dagegen eine Geschwindigkeit kleiner als 100 km/sec wählt, so werden sie vergrössert.

§ 38. Die obigen Ergebnisse betreffs Nova Herculis sowie der $Be$-Sterne scheint unsere in § 35 abgeschätzten Grössenordnungen zu bestätigen

$$\omega^{-2} \leqq 100, \quad \rho \geqq 10^{-14}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38.1)$$

Von ganz anderem Standpunkte aus haben O. Struve und P. Swings[3] den Verdünnungsfaktor als 400 und die Dichte als $2.5 \times 10^{-13}$ abgeschätzt, was guter Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen steht. Es ist auch bemerkenswert, dass die dabei von Struve und Swings selbst bemerkte Schwierigkeit bei unserer Theorie beseitigt worden ist; sie sagen nämlich: „this density is not unreasonable, as it is similar to that of the solar chromosphere. A more serious difficulty arises from the fact that in a nebula of this density the temperature may not be equal to that of the photosphere. Whether or not the proximity of the nebula to a B star insures the equality of these temperatures cannot be definitely stated....." Wir haben bis jetzt die Gleichheit dieser beiden Temperaturen stillschweigend angenommen. Das wird aber in unserer Theorie erlaubt; denn das Strahlungsionisationsgleichgewicht

1. Pub. Obs. Mich. **5** (1934) 43.
2. L. O. B. **16** (1934) 159.
3. Ap. J. **75** (1932) 161.

ist hauptsächlich durch die Sterntemperatur beherrscht, und durch die Elektronentemperatur nur in geringem Grade und zwar mittelbar durch Einfangskoeffizient $A_i$ beeinflusst (vgl. S. 115). In der Tat hat die Herabsetzung der Elektronentemperatur von 20,000° zu 10,000° nur eine Ionisationsänderung von 35% zur Folge.

§ 39. Es mag bedeutungsvoll sein, an dieser letzten Stelle, zur Anregung durch Elektronenstösse und Metastabilität des Zustandes, die wir bis jetzt ausser acht gelassen haben, ein paar Bemerkungen zu geben.

1) Um den Beitrag der Anregung durch Elektronenstösse zum Strahlungsionisationsgleichgewicht abzuschätzen, wollen wir die Anzahl solcher Anregungen $1\rightarrow 2$, die am häufigsten stattfinden, mit der des Elektroneneinfangen im 2-Zustand vergleichen. Es sei $\gamma_s$ das Verhältnis dieser beiden Fälle, so hat man

$$\gamma_s = \frac{\pi\sigma^2 C_e' n_e' n_1}{A_2 n_0} = \frac{\pi\sigma^2 C_e'}{A_2/n_0} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{n_e'}{n_e},$$

wobei man mit $\sigma$ den Radius der scheinbaren Zielscheibe und mit $C_e'$ und $n'_e$ die mittlere Geschwindigkeit bzw. die Zahl derjenigen Elektronen bezeichnet, dessen kinetische Energie sich der Anregung $1\rightarrow 2$ benügt.

Mit $\frac{A_2}{n_0} = 3.7 \times 10^{-14}$, $\frac{n_1}{n_0} = 1.7 \times 10^{-19} \cdot n_e \omega^{-2}$, $\frac{n_e'}{n_e} = 0.05$ und $\pi\sigma^2 = 10^{-16.1}$ erhält man für $T = 31{,}400$

$$\gamma_s = 2.5 \times 10^{-15} \times n_e \omega^{-2}.$$

Da nach (30.3), (30.4) $n_e \omega^{-2} = C\omega^{-\frac{1}{2}}$ ($C = 1.5 \times 0^{12}$ für 31,400°) ist, so folgt

$$\gamma_s = 3.8 \times 10^{-3} \times \omega^{-\frac{1}{2}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39.1)$$

Der Grund für die Vernachlässigung der Anregung durch Elektronenstösse bei den *Be*-Sternen ist wohl darin zu sehen, dass aus (39.1) $\gamma_s < 0.04$ nach (38.1) folgt.

2) *Metastabiler Zustand 2s.* Wir fassen der Einfachheit halber nur die ionisierten und die Atome in vier Zuständen, nämlich 1, *2s*, *2p*, 3, ins Auge. Vernachlässigt man weiter sowohl die Ionisationsvorgänge von den *2s*, *2p*, 3-Zuständen als auch den Emissionsüberschuss $Q_{[3,1]}$, so erhält man

1. S. Miyamoto, die Abhandlung wird in diesem Memoiren veröffentlicht werden.

$$\left.\begin{aligned} Q_{[3,2p]}+Q_{[3,2s]} &= A_3 n_0 \\ Q_{[2p,1]} &= A_{2p} n_0 + Q_{[3,2p]} \\ 0 &= A_{2s} n_0 + Q_{[3,2s]} \\ Q_{[2p,1]} &= \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - A_1 n_0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{.....(39.2)}$$

Hieraus folgt sogleich

$$Q_{[3,2p]} - Q_{[3,2s]} = \frac{2A_{2s}+A_3}{A_3} \cdot \left\{ Q_{[3,2p]} + Q_{[3,2s]} \right\}. \qquad \text{.....(39.3)}$$

Nun ist es leicht zu beweisen, dass der Emissionsüberschuss in diesem Fall durch die folgenden Formeln gegeben wird (vgl. §§ 2, 9, 10, 12, 13):

$$\left.\begin{aligned} Q_{[3,2p]} &= n_3 A_{3,2}\left( \frac{A_{3,2p}}{A_{3,2}} - \frac{\bar{\tau}_{2p,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} \right) \\ &\quad + \frac{\bar{\tau}_{2p,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} \cdot \frac{n_3 A_{3,2}}{\bar{\tau}_{2,3}} \left(1 - e^{-\bar{\tau}_{2,3}}\right) \\ Q_{[3,2s]} &= n_3 A_{3,2}\left( \frac{A_{3,2s}}{A_{3,2}} - \frac{\bar{\tau}_{2s,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} \right) \\ &\quad + \frac{\bar{\tau}_{2s,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} \cdot \frac{n_3 A_{3,2}}{\bar{\tau}_{2,3}} \left(1 - e^{-\bar{\tau}_{2,3}}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{.....(39.4)}$$

$$A_{3,2} = A_{3,2s} + A_{3,2p}, \quad \bar{\tau}_{2,3} = \bar{\tau}_{2s,3} + \bar{\tau}_{2p,3}, \qquad \text{.....(39.5)}$$

wo $\bar{\tau}_{2s,3}$ und $\bar{\tau}_{2p,3}$ die optischen Gesamtlängen für die $3 \rightarrow 2$-Strahlung und zwar $2s$ bzw. $2p$-Atome bedeuten.

Wenn man (39.4) in (39.3) einsetzt, so ergibt sich sogleich

$$\frac{\bar{\tau}_{2s,3} - \bar{\tau}_{2p,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2,3}}}{\bar{\tau}_{2,3}} \right\} = \frac{2A_{2s} + A_3}{A_3} \cdot \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2,3}}}{\bar{\tau}_{2,3}} - \frac{A_{3,2p} - A_{3,2s}}{A_{3,2}}; \qquad \text{.....(39.6)}$$

insbesondere,

$$\frac{\bar{\tau}_{2s,3} - \bar{\tau}_{2p,3}}{\bar{\tau}_{2,3}} = \frac{A_{3,2s} - A_{3,2p}}{A_{3,2}}, \quad \text{falls } \bar{\tau}_{2,3} \gg 1 \text{ ist,} \qquad \text{.....(39.7)}$$

$$\bar{\tau}_{2s,3} - \bar{\tau}_{2p,3} \sim 1, \quad \text{falls } \bar{\tau}_{2,3} \text{ unbedeutend ist.} \qquad \text{.....(39.8)}$$

Diese Resultate bedeuten, dass die optische Gesamtlänge für die dem Übergange zwischen dem metastabilen Zustand $2s$ und dem 3 entsprechende Strahlung der Grössenordnung nach zu der für dieselbe Strah-

lung bezüglich des $2p$ Zustandes gleich ist, selbst wenn man die vollständige Metastabilität des $2s$ Zustandes annimmt. Wenn man also die durch Elektronenstösse zu verursachenden Übergangsvorgänge $2p \rightleftarrows 2s$ berücksichtigt, die in der Tat nach S. Miyamoto (*loc. cit.*) etwa 100 mal so häufig als die ähnlichen Übergänge $1 \rightleftarrows 2$ stattfinden, so ist es desto naheliegender, dass die metastabilen Zustände keine wesentliche Rolle spielen.

## Zusammenfassung.

I. Im ersten Teil ist eine Betrachtung über den Transport der Strahlungsenergie mit einer bestimmten Eigenfrequenze ($\nu_{ij}=\nu_0$) des Atoms in der Gashülle eines *Be*-Sternes gemacht. Die Methode und die Manipulation bestehen wesentlich in der Verallgemeinerung der Theorie in unserer früheren Arbeit (Z. f. Ap. 13 (1937) 89); man entwickelt nämlich in bezug auf das „*effektive Zentrum*" die Ortfunktion in eine Reihe von $\zeta=\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}$.

1) Ein Begriff „*optische Umgebung* um einen Punkt" wird in § 1 eingeführt, deren Betrag durch die „*optische Gesamtlänge*" definiert wird (§ 5). Die Grenzfläche der optischen Umgebung lässt sich durch eine quadratische Gleichung darstellen. Der Betrag des Radiusvektors eines Punktes auf der Grenzfläche ist zu der Quadratwurzel der optischen Gesamtlänge in seiner Richtung proportional und der Mittelwert der optische Gesamtlänge ist proportional zu $\frac{1}{3}\mathrm{div}\mathfrak{v}$ (7.11).

2) Der Emissionsüberschuss sowie der Strahlungsdruck werden mittels der physikalischen Grössen in dem betreffenden Punkt in einfache Ausdrücke gebracht (§§ 9–12).

3) In §§ 14–17 werden die von dem Zentralstern aus direkt kommenden Strahlungen betrachtet. Die mittleren Intensitäten ($J_i$) der sog. Ultraviolettstrahlungen und die Absorptions- ($a_i$) sowie die Übergangskoeffizienten ($B_i$) für $J_i$ werden in ihrer Abhängigkeit von der effektiven Temperatur ($T$) in Abb. 2 veranschaulicht. Einige Bemerkungen zum „Strahlungsionsationsgleichgewicht" sind auch gemacht (§ 18).

4) Eine Zusammenstellung der Formeln im ersten Teil steht in § 13.

II. Wir betrachten im zweiten Teil das Strahlungsionisationsgleichgewicht im allgemeinen.

1) Die Bedingung für solches Gleichgewicht (die allgemeine

Zyklusgleichung) wird mit Hilfe des Ausdrucks für den Emissionsüberschuss formuliert. ((19.3), (19.4), (13.5), (13.5$_a$)).

2) Um den physikalischen Zustand der Gashülle einfach zu charakterisieren, macht man von zwei Parametern $\xi$, $q$ Gebrauch, wobei $\xi$ und $q$ dem Prozentsatz der Quantenverwandlungen von der Ultraviolettstrahlung zur $L_\alpha$-Strahlung bzw. der Durchsichtigkeit der Gashülle für die Balmerlinien massgebend sind. Sie werden durch (23.6) miteinander verbunden, und zwar derart, dass $\xi \to 0$ und $\xi \to \xi_0$ je als $q \to 0$ und $q \to \infty$. Hier entspricht die Grenze $\xi \to 0$ der unendlich grossen Dichte, $\xi \to \xi_0$ dem unendlich grossen Verdünnungsfaktor.

3) Die Schlusserfolge der Theorie sind folgendermassen:

i) Die Ionisationsvorgänge finden häufiger vom Grundzustande aus als von allen übrigen Zuständen aus statt; die Intensität $J_i$ ($i \geqq 2$) ist infolgedessen überall in der Gashülle beinahe konstant (§ 20).

ii) In § 22 wird eine von W. S. Adams und H. N. Russell gefundene Tatsache theoretisch aufrechterhalten, dass sich die Materie der Sternatmosphäre angenähert in thermodynamischem Gleichgewicht befindet, vom Standpunkt des Ionisationszustandes aus gesehen, obgleich das nicht der Fall ist, hinsichtlich der Atomenverteilung in Energieniveaus.

4) Bei dem Grenzfall $q \to \infty$ ($\xi \to \xi_0$) reduzieren sich unsere allgemeinen Zyklusgleichungen für $i \geqq 3$ zu den *Cillié*schen, während sie, für die beiden Fälle $i = 1, 2$, zusammen die *Zanstra*sche Rekombinationstheorie darstellen. Sie verhalten sich dagegen bei dem Grenzfall $q \to 0$ ($\xi \to 0$) ganz anderes.

5) Um die Zahl der Atome $n_i$ im $i$-Zustande für die Zwischenwerte von $q$ aus den allgemeinen Zyklusgleichungen zu ermitteln, führt man die Quantitäten $\bar{r}_{i+1,\,i}$ und $S_{i,\,i+1}$ ein, je nachdem $q$ klein oder gross ist. Die Werte von $\bar{r}_{i+1,\,i}$ lassen sich vorher annäherungsweise aber doch allgemein bestimmen (Tabelle II), während die von $S_{i,\,i+1}$ für jeden Wert von $q$ von vornherein berechnet werden muss.

III. Im dritten Teile werden einige numerischen Betrachtungen gemacht.

1) Erstens wird die Abhängigkeit des Parameters $q$ von den durchschnittlichen Werten einiger physikalischen Grössen, wie Dichte, Temperatur, Verdünnungsfaktor, in der Gashülle klar gemacht (§ 30, Abb. 3).

2) Nächstens werden die Zyklusgleichungen für $i = 1, 2$ numerisch gelöst. Aus den Ergebnissen der Rechnungen können die folgenden hauptsächlichen Schlüsse gezogen werden.

i) Die Gashülle der *Be*-Sterne ist für die Balmerlinien ziemlich undurchsichtig, wenn ihr Verdünnungsfaktor ($4\omega^{-2}$) klein ist—grössenordnungsgemäss etwa bis zu 400; und die Durchsichtigkeit von ziemlich hohen Grade darf nur für seinen grossen Wert—etwa $\omega^{-2} \backsim 10^4$, $10^5$, den man heute anzunehmen pflegt,—ihr zugeschrieben werden (§ 31, Tabelle IV), so dass der Verdünnungsfaktor bei den *Be*-Sternen kleiner als 400 sein muss (vgl. § 35).

ii) Die Atome vermögen die Energie der kontinuierlichen Strahlungen des Zentralsternes ausserhalb der Balmergrenze nur dann in die der Emissionslinien zu verwandeln, wenn der Verdünnungsfaktor kleiner als ein gewisser ganz kleiner Wert ist, der von der effektiven Temperatur des Zentralsternes bestimmt wird.

3) Um den Zusammenhang der relativen Intensitäten der Balmerlinien mit dem Verdünnungsfaktor zu sehen, werden die Zyklusgleichungen für einige Temperaturen nach $n_i$ numerisch aufgelöst, indem man die ersten zehn Energieniveaus berücksichtigt.

i) Für einen hinreichend grossen Verdünnungsfaktor steht unser Resultat mit dem von Cillié in schöner Übereinstimmung, der die Energieniveaus bis zu $i=14$ in Betracht gezogen hat.

ii) Die relative Intensität $H_\alpha/H_\beta$ für den Grenzfall $q \to 0$ ist viel kleiner als für den Cillié betrachteten Fall $q \to \infty$. Sie nimmt mit $q$ bis zu einem gewissen Wert zu und zwar um so stärker, je niedriger die Temperatur ist, und nimmt dann wieder allmählich ab, um letzten Endes einem $\xi \to \xi_0$ entsprechenden Wert (Cillié) asymptotisch sich zu nähern (§ 34, Tabelle VI, VII, VIII, Abb. 4).

4) Durch das Vergleichen unsere Resultate mit den Beobachtungsangaben bei den *Be*-Sternen erhält man im Mittel $\omega^{-2} \lesssim 100$, $\rho \gtrsim 10^{-14}$, die mit den Abschätzungen von O. Struve und P. Swings in Grössenordnung übereinstimmt (§ 37).

5) In § 39 werden einige Bemerkungen zu dem Grund für die Vernachlässigung der Anregung durch Elektronenstösse und des metastabilen Zustands $2s$ gegeben.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Toschima Araki für seine ständige Leitung bei der Ausführung dieser Arbeit und der Stiftung „Hattori-Hokokwai, Tokio" für ihren Unterstützungsfonds meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Institut für Astrophysik, Universität zu Kyoto, Mai 1938.

# Change of the Elastic Limit of an Aluminium Rod by Annealing

By Miyabi Sugihara

(Received July 4, 1938)

**Abstract**

In Part I, a cold-worked aluminium rod was heated in an electric furnace, and then cooled suddenly to the room temperature. The change of the elastic limit of such a rod was measured. The elastic limit decreases with the increase of the annealing temperature and the annealing time.

In Part II, the plastic elongation of an annealed aluminium rod and its elastic limit were measured repeatedly after a lapse of certain time intervals. It is observed that the elastic property is recovered, and after the lapse of a certain time its elastic limit becomes somewhat larger than the initial one.

In Part III, a cold-worked aluminium rod was annealed, was elongated plastically beyond its elastic limit, and was annealed again for various durations of time at various temperatures. The elastic limit of the rods thus obtained was examined. When the second annealing temperature is comparatively low, the elastic limit of the rod increases at the beginning of the annealing time, and in some cases it reaches a maximum. This increase of the elastic limit by weak annealing was ascribed to the recovery of the spots of weak cohesion between atoms, which were formed by the previous plastic deformation.

## Part I. Cold-worked aluminium rod

### Experimental method

A commercial cold-worked aluminium wire about 3 mm. in diameter was cut off about 20 cm. in length, and the rod was made straight by hammering on a plane iron plate with a wooden hammer. Several groups of such rods, each group consisting of four, were prepared.

A small porcelain tube, inserted in the middle of a porcelain tube of an electric furnace of a resistance type, was made movable in its axial direction. One of the above-mentioned groups of rods was inserted into the inner tube of the furnace, whose temperature was raised previously to a certain point, and after being annealed for a certain time it was taken out of the tube, and then cooled to the room temperature. By the same method, every group was annealed separately for various durations of time at various annealing temperatures.

The diameter of the rod was measured at its several points with a micrometer screw guage, and from the average value the initial

cross-sectional area of the rod was calculated. Next by the extensometer designed previously by the writer,[1] the elongation of the rod and the load applied to it were measured. The stress per unit initial cross sectional area was obtained by dividing the load by the initial area, and the elongation per unit length was calculated by using the constant of that extensometer. Thus a curve was drawn to show the relation existing in both quantities, and by using the contact point finder reported previously by the writer,[2] the elastic limit was determined. The values of the elastic limits of the four rods annealed under the same conditions are shown in Table $I_1$ as an example.

## Experimental results

In the case of the annealing temperature of about 45°C, eight groups were used, one of which was heated for one week. The result

Table $I_1$

Annealing temperature 350°C Annealing time 4 hours

| Specimen No. | Elastic limit | | Young's modulus in C. G. S. unit |
|---|---|---|---|
| | Stress per unit area | Elongation per unit length | |
| 1 | 230 $\frac{kg}{cm^2}$ | $3.34\times10^{-4}$ | $6.75\times10^{11}$ |
| 2 | 228 „ | 3.35 „ | 6.67 „ |
| 3 | 232 „ | 3.35 „ | 6.79 „ |
| 4 | 226 „ | 3.32 „ | 6.67 „ |
| Average | 229 „ | 3.34 „ | 6.72 „ |

Table $I_2$

Annealing temperature 45°C

| Specimen Group No. | Duration of annealing time | Elastic limit | | Young's modulus in C. G. S. unit |
|---|---|---|---|---|
| | | Stress per unit area | Elongation per unit length | |
| 1 | 1 hour | 605 $\frac{kg}{cm^2}$ | $8.83\times10^{-4}$ | $6.71\times10^{11}$ |
| 2 | 4 „ | 613 „ | 8.93 „ | 6.73 „ |
| 3 | 7 „ | 608 „ | 8.85 „ | 6.73 „ |
| 4 | 13 „ | 608 „ | 8.90 „ | 6.69 „ |
| 5 | 20 „ | 600 „ | 8.79 „ | 6.69 „ |
| 6 | 30 „ | 605 „ | 8.83 „ | 6.71 „ |
| 7 | 48 „ | 608 „ | 8.86 „ | 6.73 „ |
| 8 | 1 week | 608 „ | 8.88 „ | 6.71 „ |

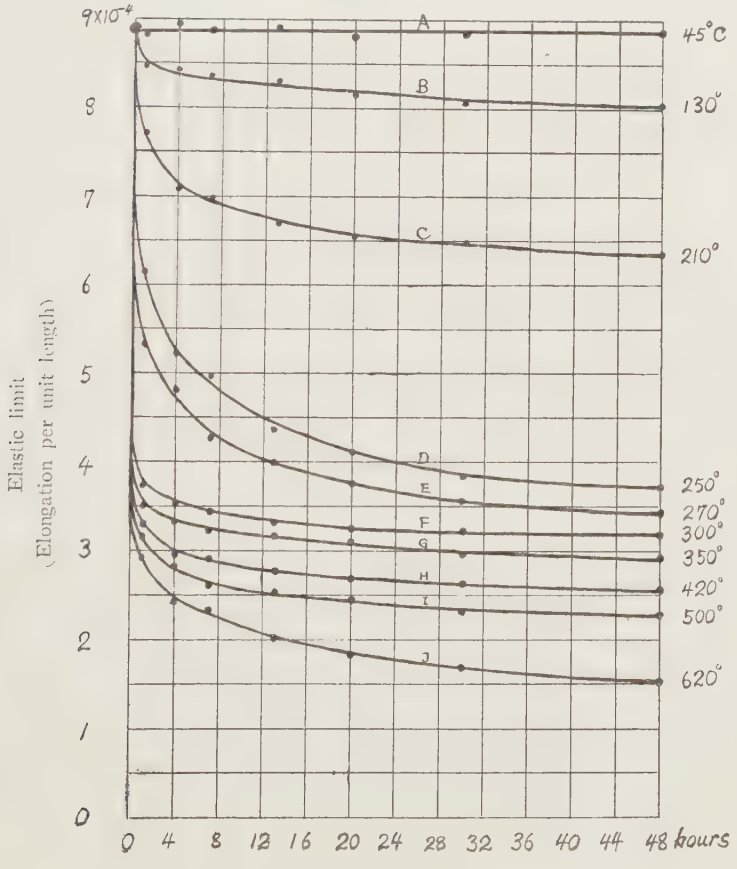
1. These Memoirs, A. **20**, 19 (1937). 2. These Memoirs, A. **20**, 27 (1937).

Table $I_3$

Annealing temperature 130°C

| Specimen Group No. | Duration of annealing time | Elastic limit: Stress per unit area | Elastic limit: Elongation per unit length | Young's modulus in C. G. S. unit |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 hour | 581 $\frac{kg}{cm^2}$ | $8.47 \times 10^{-4}$ | $6.72 \times 11^{11}$ |
| 2 | 4 „ | 577 „ | 8.43 „ | 6.71 „ |
| 3 | 7 „ | 575 „ | 8.35 „ | 6.73 „ |
| 4 | 13 „ | 568 „ | 8.31 „ | 6.70 „ |
| 5 | 20 „ | 559 „ | 8.15 „ | 6.72 „ |
| 6 | 30 „ | 555 „ | 8.07 „ | 6.74 „ |
| 7 | 48 „ | 551 „ | 8.06 „ | 6.70 „ |

Fig. 11



is shown in Table $I_2$. With various annealing temperatures, the same experiment was performed. The result obtained at the annealing temperature of about 130°C is shown in Table $I_3$ as an example.

The results obtained at various annealing temperatures are denoted by the curves drawn in Fig. 1. In drawing the curves, the elongation per unit length, instead of the stress per unit cross sectional area, is accepted as the elastic limit. The stress per unit area at the elastic limit varies with the Young's modulus and with the elastic limit represented by the elongation per unit length. As the writer has shown previously, the Young's moduli of aluminium have the same value independent of the crystal size[1], and the stress per unit area increases proportionally with the elongation per unit length. But in understanding physically the elastic property of a metal the elongation per unit length indicates the elastic limit more directly and much more clearly than does the stress per unit area.

The value of $8.88 \times 10^{-4}$ obtained previously[2] as the elastic limit of the commercial cold-worked aluminium rod without any heat treatment is used as the starting point in these curves, and is denoted by a large dot in the figure.

Curve A in this figure is of the annealing temperature about 45°C. It is seen from the curve, that at such a low temperature the elastic limit does not change with the annealing time. The elastic limit of the rod annealed for one week at 45°C is given in Table $I_2$, and no difference in its value is detected.

Curve B is of the annealing temperature about 130°C. The elastic limit is somewhat affected by the annealing temperature, and it decreases rapidly at first and then slowly with the annealing time.

As is seen from the curves C to J, whose annealing temperatures are respectively written in the figure, the elastic limit decreases rapidly at first and then slowly with the annealing time, and it decreases also with higher annealing temperature.

It is seen from the curves D and E, that the elastic limit decreases very rapidly when the annealing temperature is in the vicinity of 250°C or 270°C. This fact is considered to be due to the recrystallization which begins to occur considerably at about this annealing temperature.

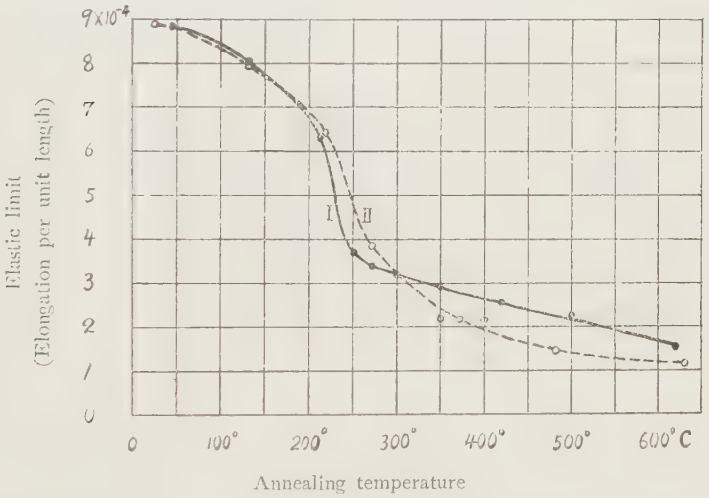
Curve F is of the annealing temperature about 300°C. The elastic limit decreases very rapidly in about one hour and after that gradually.

1. These Memoirs, A. **17**, 389 (1934).
2. „ „ A. **20**, 27 (1937).

Curves G, H, I and J whose annealing temperatures are written respectively in this figure, show the same tendency as curve F. These facts seem to indicate that, at annealing temperatures higher than 300°C, recrystallization occurs very rapidly in the beginning of the annealing time.

In the case of gradual heating and gradual cooling, the relation between the elastic limit and the annealing temperature was previously obtained for annealing time of 48 hours[1]. For the sake of comparison with the present experiment, where the heating and the cooling of the specimen were made rather suddenly, the relation between the elastic limit and the annealing temperature for the annealing time of 48 hours is represented in Fig. 12.

Fig. 12




In this figure, Curve I drawn in a continuous line, denotes the present result. It is seen from this curve, that the elastic limit decreases very slowly at first to about 200°C, and then rapidly to about 270°C, and again slowly to about 620°C.

In order to compare the present result with the previous one, Curve II in the figure which is drawn as a broken line, is replotted in the same scale as Curve I. Both curves show generally the same tendency. However entering into details, the elastic limit in the case of sudden heating and sudden cooling almost coincides with that in the

1. These Memoirs, A. **20**, 27 (1937).

case of gradual heating and gradual cooling from the beginning to about 200°C, and then the former becomes somewhat smaller than the latter from about 200°C to about 300°C, and thereafter the former becomes larger than the latter. This seems to be due to the fact that the size of a crystal produced by recrystallization in sudden heating is smaller than that in gradual heating as was shown by the experiment made by Yoshida, Nagata and Mitsuki[1].

## Part II. Plastic elongation and the elastic limit

### Experimental method

Aluminium rods having the same size as in Part I were prepared in the same manner as before. Such a rod was inserted in an electric furnace whose temperature was previously raised to about 500°C, and after 30 hours it was taken out of the furnace and cooled suddenly to the room temperature. By the extensometer indicated in Part I, the rod was elongated plastically beyond its elastic limit, and the value of the elastic limit as well as the value of the plastic elongation was measured. The same rod was plastically elongated repeatedly at regular intervals, and at each time the maximum elongation, the elastic limit and the plastic elongation were measured. These results are shown in Table $II_1$. The plastic elongation above-mentioned is the quantity obtained by subtracting the elastic limit from the maximum elongation at that time.

Table $II_1$

Annealing temperature 500°C  Annealing time 30 hours

| No. | Successive interval | Elastic limit | | Maximum elongation per unit length | Young's modulus in C. G. S. unit | Successive excess of elastic limit | Plastic elongation per unit length |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Stress per unit area | Elongation per unit length | | | | |
| 1 | | 160 $\frac{kg}{cm^2}$ | $2.31\times10^{-4}$ | $4.01\times10^{-4}$ | $6.79\times10^{11}$ | | $1.70\times10^{-4}$ |
| 2 | 15 minutes | 196 „ | 2.84 „ | 4.03 „ | 6.76 „ | $0.53\times10^{-4}$ | 1.19 „ |
| 3 | 15 „ | 212 „ | 3.10 „ | 4.55 „ | 6.70 „ | 0.26 „ | 1.45 „ |
| 4 | 4 hours | 208 „ | 3.05 „ | 5.46 „ | 6.68 „ | −0.05 „ | 2.41 „ |
| 5 | 24 „ | 230 „ | 3.32 „ | 5.08 „ | 6.79 „ | 0.27 „ | 1.76 „ |
| 6 | 24 „ | 240 „ | 3.48 „ | 5.90 „ | 6.76 „ | 0.16 „ | 2.42 „ |
| 7 | 24 „ | 254 „ | 3.71 „ | 5.07 „ | 6.71 „ | 0.23 „ | 1.36 „ |

1. These Memoirs, A, **19**, 169 (1936).

After eight new aluminium rods were annealed at about 480°C for 30 hours as above described, their elastic limits, maximum elongations and plastic elongations were measured respectively, and the average was taken. All the rods were then classified into two sets each consisting of four rods. The elastic limits of the rods belonging to the first set were measured after one day, and the other after twelve days. The average of each set was taken. Here it must be noted that in the present experiment the maximum elongations of the rods belonging to the same set were so adjusted that they were nearly the same. Otherwise the average is meaningless.

Another group of twelve new rods was annealed for 30 hours at about 620°C. Their elastic limits, maximum elongations and their plastic elongations were measured respectively, and the average was taken. These rods were classified into three sets each consisting of four rods. The elongation-testings for three sets were made after two days, nine days and sixteen days respectively. The average of the elastic limits

Table $II_2$

Annealing time 30 hours

| Specimen Group No. | Annealing temperature | Interval | Elastic limit: Stress per unit area | Elastic limit: Elongation per unit length | Maximum elongation per unit length | Young's modulus in C. G. S. unit | Excess of elongation per unit length | Plastic elongation per unit length |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 166 $\frac{kg}{cm^2}$ | $2.42\times10^{-4}$ | $4.58\times10^{-4}$ | $6.72\times10^{11}$ | | $2.16\times10^{-4}$ |
| 1 | 480°C | 1 days | 211 „ | 3.05 „ | | 6.78 „ | $0.63\times10^{-4}$ | |
| | | 12 „ | 212 „ | 3.06 „ | | 6.78 „ | 0.64 „ | |
| | | | 115 „ | 1.68 „ | 4.54 „ | 6.71 „ | | 2.86 „ |
| 2 | 620°C | 2 days | 162 „ | 2.35 „ | | 6.76 „ | 0.67 „ | |
| | | 9 „ | 160 „ | 2.33 „ | | 6.73 „ | 0.65 „ | |
| | | 16 „ | 166 „ | 2.41 „ | | 6.75 „ | 0.73 „ | |

Table $II_3$

First annealing temperature 610°C, second annealing temperature 45°C

| Specimen Group No. | Duration of annealing time | Elastic limit: Stress per unit area | Elastic limit: Elongation per unit length | Young's modulus in C. G. S. unit |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 117 $\frac{kg}{cm^2}$ | $1.70\times10^{-4}$ | $6.78\times10^{11}$ |
| 2 | 13 hours | 120 $\frac{kg}{cm^2}$ | $1.75\times10^{-4}$ | $6.72\times10^{11}$ |
| 3 | 48 „ | 122 „ | 1.77 „ | 6.75 „ |
| 4 | 1 week | 130 „ | 1.88 „ | 6.78 „ |

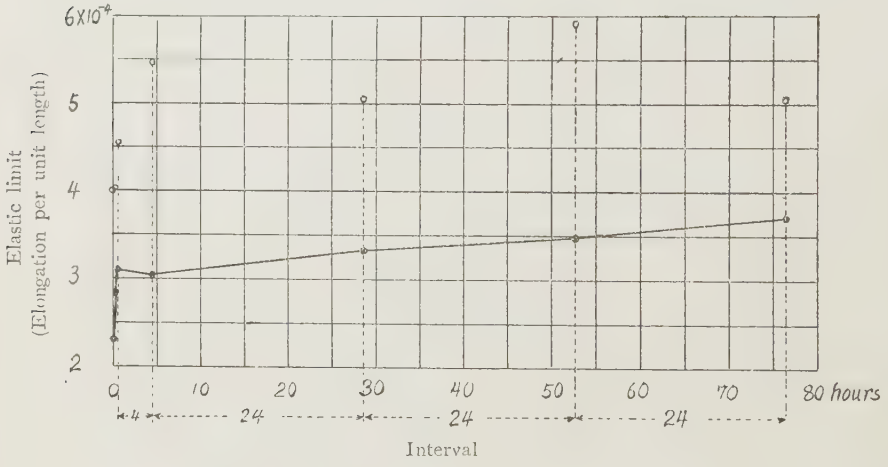
of the rods belonging to each set was taken. The results are given in Table $II_2$.

Next sixteen new rods were annealed for 30 hours at about 610°C as in the previous experiment. They were classified into four groups each consisting of four rods. The elastic limits of the rods belonging to the first group were measured and the average was taken. It is given in the first horizontal row of Table $II_3$. The three remaining groups were again annealed at about 45°C for 13 hours, 48 hours and one week respectively. After measuring the elastic limits of the rods belonging to each group, the average of the limits for each group was taken. The results are tabulated in Table $II_3$.

## Experimental results

The result given in Table $II_1$ is represented by a graph shown in Fig. $2_1$. In this figure, small dots denote the elastic limits and small circles the maximum elongations to which the specimens were subjected in measuring the elastic limits. When the elastic limit of a rod, which has been elongated previously beyond its elastic limit is measured after a lapse of a certain time, it has not returned to its initial value but remains somewhat larger.

Fig. $2_1$

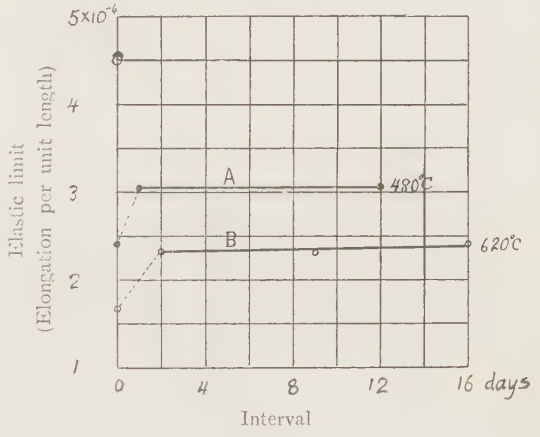



The residue obtained by subtracting the elastic limit from the maximum elongation per unit length to which the specimen is subjected in measuring its elastic limit, that is, the plastic elongation, is shown in the last vertical column of the table. The residue obtained by

subtracting the upper elastic limit from the following one in the table, that is, the successive excess of the elastic limit is shown in the column second from the last in the table. As is shown in the table, the first plastic elongation is $1.70 \times 10^{-4}$ and the excess of the elastic limit measured after the first 15 minutes is $0.53 \times 10^{-4}$. The excess of the elastic limit at the interval of 4 hours is $-0.05 \times 10^{-4}$, which means that the elastic limit decreases. But as this is a very small quantity as experimental errors go, it may be stated that the elastic limit does not change in this case. In the case of an interval of 24 hours, the excesses of the elastic limits are all positive. Thus considering these facts, we may say generally that the elastic limit increases gradually by the ageing after a plastic deformation, at least for such a small plastic deformation as in the present experiment.

The result given in Table $II_2$ is represented in Fig. $2_2$. In this figure, Line A is of the annealing temperature of 480°C, and Line B is of 620°C. The small dots denote the elastic limits of the former and the small circles those of the latter. A large dot and a large circle denote the maximum elongation per unit length of the former and that of the latter respectively. It is seen from the two lines, that the elastic limit of the rod elongated once beyond its elastic limit grows somewhat larger with the lapse of time.

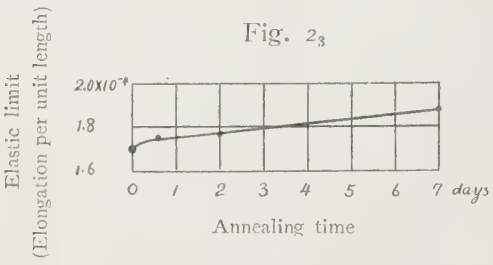
Fig. $2_2$




When the rod is elongated plastically beyond its elastic limit, a slip between the atomic planes will occur in relatively large crystal grains, and consequently such grains are broken down into smaller pieces. At the same time, spots of loose cohesion between atoms in the structure will be formed somewhere by the process of plastic deformation. The elastic limit of a metal increases by making its crystal grains smaller, and it decreases by the production of localities of loose cohesion between atoms in its structure. Thus when a metal is plastically

deformed and then aged, the crystal grains get finer by the plastic deformation, and the spots of loose cohesion between atoms recover their normal state by the ageing; and consequently the elastic limit increases after ageing.

Fig. $2_3$




The result given in Table $II_3$ is denoted by a curve in Fig. $2_3$. In the present experiment, the rod recrystallized by the initial annealing at about 610°C was subjected, without rendering any elongation, to a second annealing at about 45°C which is somewhat higher than room temperature. In the figure, the elastic limit of the rod annealed only once at 610°C is denoted by a large dot. It is found from the curve, that the elastic limit of the rod which is heated again at about 45°C increases a little with the annealing time. But the elastic limit of such a rod is considerably smaller than that of the rod elongated plastically beyond its elastic limit.

Next we shall consider the reason why the elastic limit of the rod increases a little, on the second annealing, with the annealing time. When the rod annealed initially at about 610°C in the present case is suddenly cooled to the room temperature, spots of loose cohesion between atoms may appear somewhere in the structure of the rod on account of the rapid contraction. When such a rod is heated again at about 45°C, which is a little higher than the room temperature, the spots of loose cohesion between atoms will recover their normal state; and hence the elastic limit increases by ageing.

## Part III. Annealed aluminium rod

### Experimental method

Commercial aluminium rods which were made straight and had the same size as described in Part I were used in the present experiment. A number of rods were inserted in the electric furnace heated at about 450°C, and after 30 hours they were taken out of the furnace to be cooled suddenly to the room temperature. Such a rod was plastically elongated beyond its elastic limit, and its elastic limit and the maximum elongation of the rod were measured by the same ap-

paratus as described before. The average value of the elastic limits and that of the maximum elongations of twenty such rods were taken respectively. The results are shown in Table $III_1$. The state of the rod thus elongated is taken as the initial one in the present experiment.

Table $III_1$

Annealing temperature 450°C

| Specimen No. | Elastic limit | | Maximum elongation per unit length | Young's modulus in C. G. S. unit |
|---|---|---|---|---|
| | Stress per unit area | Elongation per unit length | | |
| 1 | 176 $\frac{kg}{cm^2}$ | $2.53\times10^{-4}$ | $3.97\times10^{-4}$ | $6.81\times10^{11}$ |
| 2 | 184 „ | 2.66 „ | 4.07 „ | 6.78 „ |
| 3 | 182 „ | 2.65 „ | 4.16 „ | 6.73 „ |
| 4 | 172 „ | 2.50 „ | 4.07 „ | 6.71 „ |
| 5 | 176 „ | 2.55 „ | 4.07 „ | 6.76 „ |
| 6 | 174 „ | 2.53 „ | 4.13 „ | 6.74 „ |
| 7 | 180 „ | 2.63 „ | 4.06 „ | 6.71 „ |
| 8 | 174 „ | 2.50 „ | 3.90 „ | 6.80 „ |
| 9 | 168 „ | 2.42 „ | 3.95 „ | 6.80 „ |
| 10 | 170 „ | 2.50 „ | 3.96 „ | 6.66 „ |
| 11 | 170 „ | 2.49 „ | 4.02 „ | 6.69 „ |
| 12 | 174 „ | 2.53 „ | 3.95 „ | 6.74 „ |
| 13 | 168 „ | 2.44 „ | 4.02 „ | 6.75 „ |
| 14 | 170 „ | 2.45 „ | 3.97 „ | 6.80 „ |
| 15 | 176 „ | 2.55 „ | 4.11 „ | 6.76 „ |
| 16 | 176 „ | 2.54 „ | 4.22 „ | 6.79 „ |
| 17 | 170 „ | 2.47 „ | 4.21 „ | 6.75 „ |
| 18 | 170 „ | 2.46 „ | 4.16 „ | 6.77 „ |
| 19 | 172 „ | 2.47 „ | 4.03 „ | 6.82 „ |
| 20 | 174 „ | 2.50 „ | 4.02 „ | 6.82 „ |
| Average | 174 „ | 2.52 „ | 4.05 „ | 6.76 „ |

Several groups of the rods, each consisting of four rods in such a state, were prepared. Each group was annealed for different durations of time in the electric furnace heated at about 45°C. After the rods were taken out of the furnace suddenly, their elastic limits were measured separately with the apparatus described before. The values for the four rods belonging to the same group were averaged, and this average was taken as the value for that group.

Several groups of the rods in the same initial state, each group consisting of four rods, were annealed at various different temperatures

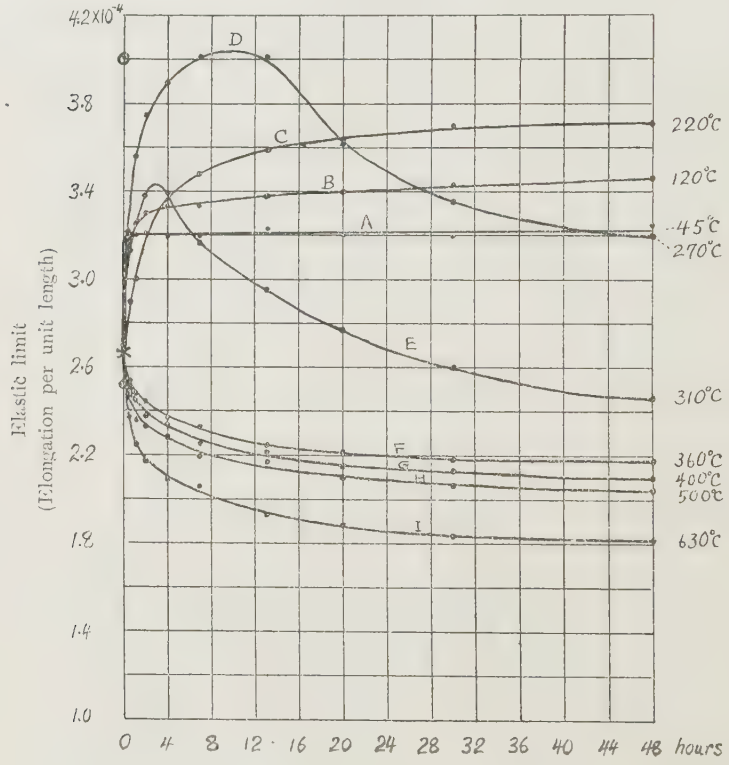
in the same manner as above stated, and their elastic limits were measured. The results thus obtained are shown in Fig. $3_1$.

Further two initial states which were different from the above were employed; one was annealed initially at about 620°C and the other at about 330°C. All the rods thus annealed initially for 30 hours at these temperatures respectively were treated in the same manner as above mentioned. The results thus obtained are shown in Figs. $3_2$ and $3_3$ respectively.

## Experimental results

In Fig. $3_1$, a small circle ○ and a small circle having a centre ⊙ denote respectively the elastic limit and the maximum elongation in the initial state. Curve A is of the annealing temperature 45°C. The elastic limit becomes somewhat larger with the annealing time. Further, in this case the rod was annealed for one week, but it did not show

Fig. $3_1$



any considerable increase in the elastic limit. The fact that the elastic limit in the present case is somewhat higher than that in its initial state, results from the plastic elongation, as is described in Part II.

As is stated in Part II, when the rod elongated plastically beyond its elastic limit is subjected again to a second elongation-testing after a lapse of time, the elastic limit of the rod is found to be somewhat larger than its initial one. In this figure, a cross sign × indicates the point of such increased elastic limit, and from this point all the curves are considered to start.

Curve B is of the annealing temperature 120°C, and the elastic limit increases gradually with the annealing time under the influence of the annealing temperature. Curve C is of the annealing temperature 220°C, and the elastic limit increases gradually with the annealing time like Curve B. Curve D is of the annealing temperature 270°C. The elastic limit increases considerably for about 10 hours and then decreases. Curve E is of the annealing temperature 310°C. The elastic limit increases rapidly for about 3 hours and then decreases gradually like Curve D. The elastic limit represented by this curve is always smaller at each annealing time than that represented by Curve D.

Curve F is of the annealing temperature 360°C, and the elastic limit decreases gradually with the annealing time. Curves G, H, and I are of the annealing temperatures 400°C, 500°C and 630°C respectively. In these cases the elastic limit decreases gradually with the annealing time like Curve F, and the elastic limit at a higher annealing temperature is always smaller than at a lower temperature when compared at the same annealing time.

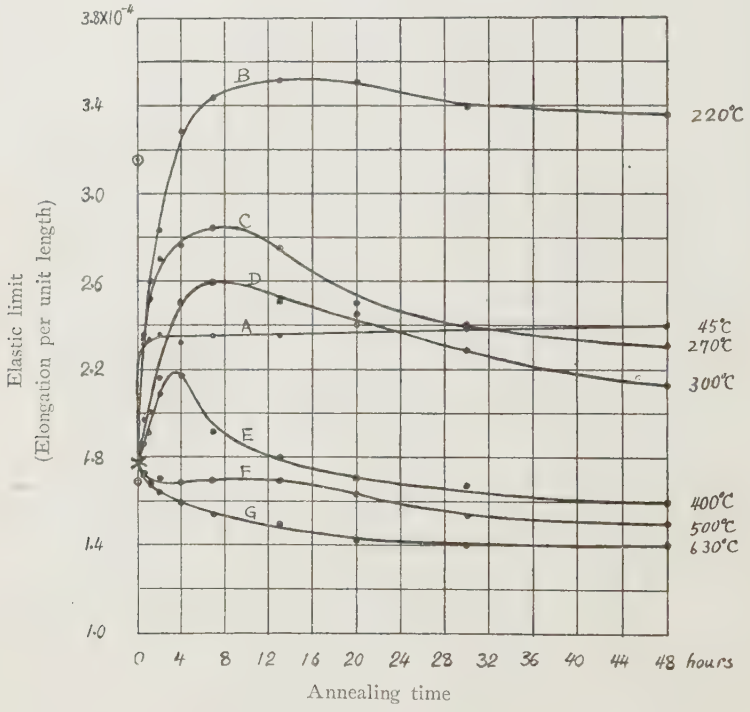
After examining all the curves, the case can be summarized substantially as follows. The elastic limit at annealing temperatures below about 300°C increases at first with the annealing time until it reaches a maximum value. The higher the temperature, the sooner will this point of maximum value be reached. In the case of annealing temperatures higher than about 300°C, the elastic limit decreases gradually with the annealing time from the beginning.

As before stated, when a rod annealed at a high temperature is suddenly cooled, it is considered that spots of loose cohesion between atoms occur by contraction somewhere in the structure of the rod. If such a rod is elongated plastically beyond its elastic limit, the spots of such loose cohesion between atoms will be greatly increased through the breaking down of the crystal grains into smaller pieces by the plastic elongation. By annealing such a rod the spots of loose cohesion

will be restored more easily by annealing even below its recrystallization temperature. Accordingly the elastic limit of the rod increases.

When the second annealing temperature is sufficiently high, the decrease of the elastic limit by the grain growth resulting from the recrystallization seems to appear more considerably than the increases due to the recovery of the spots of loose cohesion ; so that the elastic limit decreases, without showing any maximum, with the annealing time. In such a case, the higher the annealing temperature, the larger the crystal size produced by recrystallization. Hence the elastic limit decreases with higher annealing temperatures.

Fig. 32




The initial annealing temperature of about 620°C is illustrated in Fig. 32, where a small circle ○, a small circle having a centre ⊙ and a cross × have the same meaning as before. In this figure, Curve A is of the annealing temperature 45°C, and the elastic limit is only slightly influenced as in the case of the same annealing temperature in Fig. 31. In this case, the rod was annealed for one week, but the elastic limit of the rod increased only slightly.

Curve B is of the annealing temperature 220°C. The elastic limit increases for about 16 hours and then decreases slowly. Curve C is of the annealing temperature 270°C. The elastic limit increases rapidly for about 8 hours and then decreases slowly. The tendency of this curve is quite similar to Curve D at the same annealing temperature in Fig. $3_1$.

Curve D is of the annealing temperature 300°C. The elastic limit increases rapidly for about 7 hours and then decreases gradually. Curve E is of the annealing temperature 400°C. The elastic limit increases rapidly for about 3 hours, then decreases rapidly and afterwards gradually. This curve shows a tendency similar to Curve E in Fig. $3_1$, but the annealing temperatures are different in the two cases. Curve F is of the annealing temperature 500°C. The elastic limit does not change practically for the first 13 hours or so, and then it decreases very slowly. Curve G is of the annealing temperature 630°C. The elastic limit decreases slowly with the annealing time. The tendency of this curve is similar to Curves F, G, H and I in Fig. $3_1$.

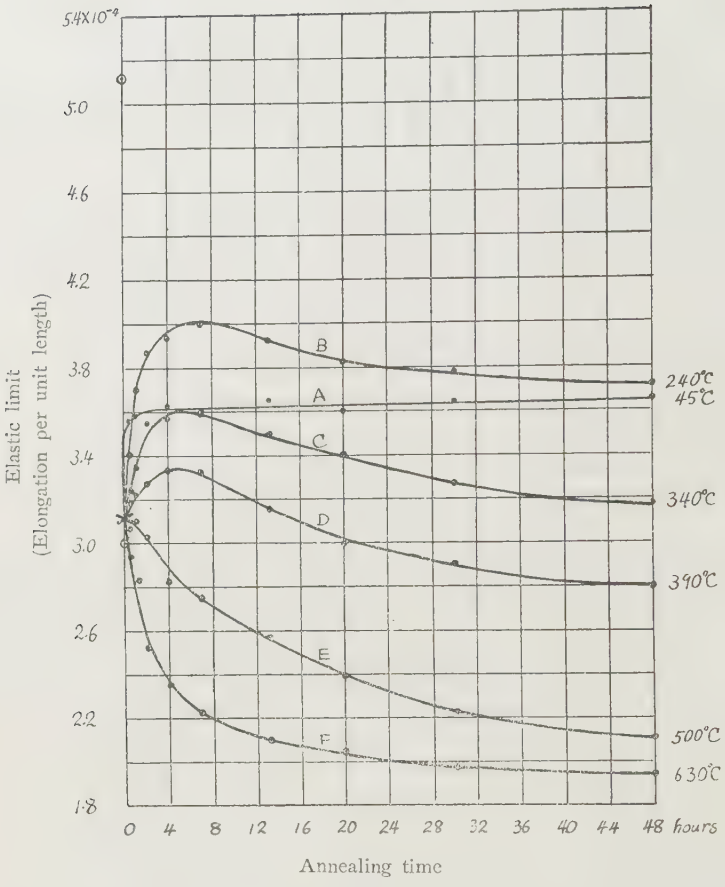
In looking over all the curves in this figure, the curve whose elastic limits increase at first like those in Fig. $3_1$ was obtained at the second annealing temperature from about 220°C to about 400°C. The maximum position of the elastic limit displaces to the beginning of the annealing time according to the increase of the annealing temperature. This is a similar tendency to that shown in Fig. $3_1$.

The initial elastic limit of the curves in Fig. $3_2$ is smaller than that in Fig. $3_1$, and the second elastic limits represented in Fig. $3_2$, which are measured after the second annealing, show a much smaller tendency to decrease with annealing than those in Fig. $3_1$. Moreover it can be stated in general, by comparing the above two cases, that when the initial elastic limit is small, the second elastic limit is also small. Here it must be noted that the amount of the plastic elongation beyond its elastic limit in the initial state, is $1.53 \times 10^{-4}$ in the case of Fig. $3_1$ and $1.47 \times 10^{-4}$ in the case of Fig. $3_2$. As these values are almost the same, the influence of the initial plastic elongation can be considered as almost the same in the two cases.

The results obtained at the initial annealing temperature of about 330°C are denoted by the curves in Fig. $3_3$, where the marks ○, ⊙ and × have the same meanings as before.

Curve A is of the second annealing temperature 45°C. The elastic limit is influenced only slightly by the annealing temperature and

Fig. 33




increases somewhat with the annealing time like those in the above two cases. As an example, the specimen was annealed for one week. Its elastic limit did not increase greatly, but a tendency of gradual increase was observable with this annealing temperature.

Curve B is of the annealing temperature 240°C. The elastic limit increases rapidly for about 7 hours, and then decreases gradually. Curve C is of the annealing temperature 340°C. The elastic limit increases rapidly for about 5 hours and then also decreases gradually. Curve D is of the annealing temperature 390°C. It shows a similar tendency to the above two curves, and the maximum of the elastic limit appears at the annealing time of about 4 hours from the beginning. Curve E is of the annealing temperature 500°C. The elastic limit decreases

gradually with the annealing time. Curve F is of the annealing temperature 630°C. The elastic limit decreases rapidly for 4 hours or so and then slowly.

In surveying in general all the curves in this figure, the elastic limit at the annealing temperature between about 240°C and about 390°C increases rapidly at first and then decreases gradually. The maximum of the elastic limit displaces to the beginning of the annealing time according as the annealing temperature becomes higher just as in the above two cases whose initial elastic limits and the initial annealing temperatnres are different from this case. The elastic limit at an annealing temperature higher than about 500°C decreases gradually with the annealing time. Within the range of the annealing temperatures employed in the present experiment, except 45°C, the elastic limit is always smaller at the higher annealing temperature when two are compared at the same annealing time.

In the above three cases having different initial elastic limits, the amount of the plastic elongation beyond the elastic limit in Figs. $3_1$ and $3_2$ is almost the same value : $1.5 \times 10^{-4}$ ; and that in Fig. $3_3$ is $2.11 \times 10^{-4}$. Though the latter is somewhat larger, these may be regarded as of the same order.

If we compare the case of a smaller initial elastic limit with that of a larger one, the second elastic limit of the former increases more rapidly in the beginning of the annealing than that of the latter, when the second annealing temperature is relatively low ; and when the second annealing temperature is relatively high, the second elastic limit decreases much less in the former than in the latter.

In the experiment in this Part, the rod, after being annealed at an adequate temperature, was elongated a little plastically, and then it was annealed again at various temperatures for various durations of time. Thus the plastic deformation of the crystallites is small and the recrystallization temperature is to be relatively high. Accordingly the decrease of the elastic limit due to the grain growth resulting from the recrystallization occurs when the rod is subjected to a second annealing for a relatively long time at a relatively high temperature. The increase of the elastic limit caused by heating of the specimen for a relatively short time at a relatively low temperature is considered to be due to the recovery of the spots of weak cohesion between atoms by such weak annealing. According as the second annealing temperature rises, the influence of the grain growth by recrystallization predominates step by step and at last the elastic limit decreases monotonously with the heating time.

When the first annealing temperature is sufficiently high, for example 620°C as in the case of Fig. $3_2$, the crystallites grow sufficiently large by this annealing, so that the elastic limit is rather small. Even if the plastic elongation of such a small amount as $1.5 \times 10^{-4}$ is applied to the specimen thus prepared, the increase of the elastic limit due to this operation is very small. Further if the specimen thus operated on is again annealed at 630°C, the size of the crystallites caused by this operation will still not be very different from those produced by the first annealing at 620°C. Accordingly the decrease of the elastic limit by the second annealing is small.

On the contrary, when the first annealing temperature is as low as 330°C (see Fig. $3_3$,) the grain growth by this annealing is not sufficient. If such a specimen is elongated a little plastically and is annealed again at 630°C, the crystallites will grow considerably larger than before, so that the decrease of the elastic limit by the second annealing becomes very large.

When the second annealing temperature is so adequate as to cause a maximum in the elastic limit, the growth of the crystallites by recrystallization and the recovery of the spots of weak cohesion between atoms influence the elastic limit simultaneously. The fact that the annealing time which is necessary to cause a maximum in the elastic limit is reduced more and more according as the second annealing temperature becomes higher, seems to be explained clearly by considering that the influence of the growth of the crystallites predominates more and more with higher annealing temperature.

In Part I, commercial aluminium rods which were previously strongly cold-worked were annealed directly without any previous annealing, and the elastic limits of the rods thus obtained were measured. In this case the rods were left alone for a very long time after the cold-working ; and the spots of weak cohesion between atoms which were formed by the cold-working would be almost recovered by such long ageing. Moreover the recrystallization temperature is very much lowered by the strong cold-working, so that the decrease of the elastic limit due to grain growth by annealing even at a comparatively low-temperature predominates strongly. Actually the tendency to the increase of the elastic limit by annealing is masked entirely by such decrease of the elastic limit, and no trace of the increase is perceived.

In conclusion, the writer wishes to express his sincere thanks to Prof. U. Yoshida for his kind guidance in the present experiment.

# Elastic Property of an Aluminium Rod and its Crystal Grains

By **Miyabi Sugihara**

(Received July 4, 1938)

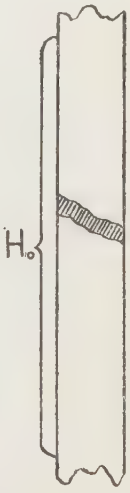
**Abstract**

Among the elastic properties of aluminium rods composed of crystal grains of various sizes, Young's modulus has the same value independent of the crystal sizes. The value is almost the same that the crystal itself has. On the contrary the elastic limit represented by the elongation per unit length depends upon the crystal size. This seems to be due to the fact that the elastic limit at the inner part of the crystal is much affected by its boundary which is elastically stronger. Under such a consideration, the relation between the elastic limit and the grain number is expressed by a relatively simple formula.

The writer has already studied the relation between the elastic property and the crystal grain size for an aluminium rod[1]. According to that study, the crystal grain size affects the elastic limit but not the Young's modulus: that is, the Young's modulus is independent of the crystal grain size varied by cold-working or annealing and takes a special value proper to that crystal. In the following a further study of these points was made.

Fig. 1

Fig. 2




## I. Young's modulus

Consider an aluminium rod composed of many crystal grains as shown in Fig. 1. Let us consider in the rod a thin vertical column bounded by two thick lines as shown in this figure. Then such a column will cut many crystal boundaries. In Fig. 2, one of such boundaries is shown by the shaded part.

1. These Memoirs, A. **17**, 389 (1934).
These Memoirs, A. **20**, 27 (1937).
These Memoirs, A. **20**, 173 (1937).

If the specimen is elongated by applying a load, the original length $H_0$ will become $H$. Let the Young's moduli of the crystal itself and the crystal boundary be denoted by $E_1$ and $E_2$ respectively. By taking the vertical height of the boundary as uniform for the sake of simplicity, suppose its original height $h_0$ is elongated to $h$. Further let the original length of the crystal itself within the length $H_0$ be denoted by $l_0$ and the elongated length of $l_0$ be $l$.

Let the vertical load applied to the unit cross-sectional area of the rod be denoted by $W$, then in the case of a small elongation within the elastic limit the following relations hold for the crystal itself and for the boundary respectively.

$$\frac{l-l_0}{l_0}=\frac{1}{E_1}W \qquad \text{.....(1)},$$

$$\frac{h-h_0}{h_0}=\frac{1}{E_2}W \qquad \text{.....(2)}.$$

For the elongation as a whole, we have

$$\frac{(l+h)-(l_0+h_0)}{l_0+h_0}=\frac{(l-l_0)+(h-h_0)}{H_0}=\frac{\frac{l_0}{E_1}+\frac{h_0}{E_2}}{H_0}W.$$

Let the Young's modulus as a whole be denoted by $E$, then we get

$$\frac{\frac{l_0}{E_1}+\frac{h_0}{E_2}}{H_0}W=\frac{1}{E}W.$$

Therefore $$\frac{H_0}{E}=\frac{l_0}{E_1}+\frac{h_0}{E_2} \qquad \text{.....(3)}.$$

When the thin vertical column cuts many crystal boundaries, we have

$$\frac{H_0}{E}=\frac{\Sigma l_0}{E_1}+\frac{\Sigma h_0}{E_2} \qquad \text{.....(4)}.$$

When the actual test piece is supposed to be composed of many such thin vertical columns as we have here considered, we may consider that equation (4) holds for any column. Further we may consider that $\Sigma l_0$ and $\Sigma h_0$ in any column are equal respectively in an average. Therefore if we consider only one such column as above mentioned, we can infer the elastic property of the rod as a whole.

The writer has examined the Young's moduli of aluminium rods composed of crystals of various sizes extending over a very wide range. According to that experiment, Young's modulus has a constant value independent of the crystal grain size, and it is the same as that of the specimen composed of only a few crystals. Accordingly it can be

stated, that even in the case of a rod composed of a number of fine crystal grains, the Young's modulus measured takes the value which is proper to the crystal itself.

If we assume that the Young's modulus of the crystal boundary is equal to that of the inner part of the crystal, the above-mentioned fact must hold as a matter of course. But this assumption is too dogmatic, and it seems to be more natural to consider that the crystal boundary and the inner part of the crystal have in general different Young's moduli. Even in this case, if $\Sigma h_0$ is negligible in comparison with $\Sigma l_0$, $E=E_1$ follows from equation (4). According to the writer's experiment, $E=E_1$ holds, as was stated before, even for the specimen composed of very fine crystal grains. Accordingly, even if the Young's modulus at the crystal boundary has a value different from that at the inner part of the crystal, this must be confined to a very thin atomic layer consisting of only a few atoms at the crystal boundary; so that $\Sigma h_0$ can be neglected as compared with $\Sigma l_0$.

## II. Elastic limit

The elastic limit of an aluminium rod decreases according as the crystal grain becomes larger. This is entirely different from the case of Young's modulus. Now let the elastic limit of the crystal itself represented by the elongation per unit length be denoted by $\varepsilon_1$, and that of the crystal boundary by $\varepsilon_2$. Then it is reasonable to consider that $\varepsilon_1$ is smaller than $\varepsilon_2$. Accordingly, when the elongation of the inner part of the crystal reaches its elastic limit, the elongation of the specimen reaches its elastic limit as a whole, even though the elongation of the boundary is inferior to its elastic limit. By considering such a thin column as was considered before in the case of the Young's modulus, let us suppose that the elongation of the specimen reaches its elastic limit as a whole, then we have evidently

$$\frac{l-l_0}{l_0}=\varepsilon_1 \qquad \text{.....(5).}$$

From equation (1), we have

$$W=\varepsilon_1 E_1.$$

From equation (2), we get

$$\frac{h-h_0}{h_0}=\frac{1}{E_2}W=\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1.$$

The elongation per unit length of the column as a whole at its elastic limit is

$$\frac{(l+h)-(l_0+h_0)}{H_0}=\frac{(l-l_0)+(h-h_0)}{H_0}=\frac{l_0\varepsilon_1+h_0\varepsilon_1\dfrac{E_1}{E_2}}{H_0}.$$

When the thin column cuts many crystal boundaries, the elastic limit as a whole becomes

$$\frac{1}{H_0}\left\{\Sigma l_0\varepsilon_1+\Sigma h_0\varepsilon_1\frac{E_1}{E_2}\right\} \qquad \text{.....(6).}$$

If the part having a different elastic limit at the crystal boundary is restricted within a very thin atomic layer of the boundary as in the case of the Young's modulus, then the second term in (6) can be neglected in comparison with the first term, and formula (6) is reduced to

$$\frac{1}{H_0}\varepsilon_1\Sigma l_0=\varepsilon_1.$$

Accordingly the value of the elastic limit ought to be independent of the crystal size and must be the same as that of the crystal itself. But this is contradictory to the actual fact, and we must consider that the influence of the crystal boundary which has a higher elastic limit extends from the boundary to a considerable depth in the interior of the crystal, and accordingly that the elastic limit as a whole becomes larger than that of the crystal itself. This is entirely different from the case of the Young's modulus.

We can imagine, either from the presence of the Beilby's amorphous substance at the crystal boundary or simply from the irregular arrangement of the atoms at that point, that the elastic limit is larger at the crystal boundary than in the interior of the crystal itself. Next the fact that the influence of the boundary which has a higher elastic limit extends from the boundary to a considerable depth in the interior of the crystal seems to be easily explained by considering the slip interference of the crystals which is caused by the presence of its boundary.

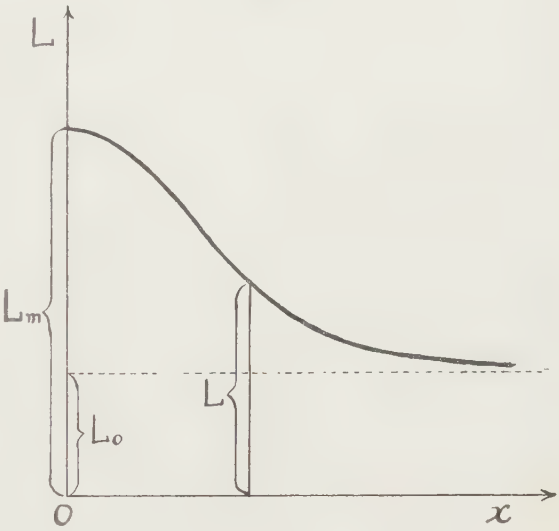
When a metal plate composed of a few large crystals is elongated plastically, the crystal adjacent to the boundary is elongated only slightly, and as we recede from the boundary its elongation becomes gradually larger, so that it is maximum at the middle part of the crystal. Hence it is not absurd to consider that the elastic limit in the crystal decreases inwards from the boundary not rapidly but gradually. Let the elastic limit at the crystal boundary represented by the elongation per unit length be denoted by $L_m$, and that of the single crystal by $L_0$. Next let the elastic limit at an inner part of the crystal whose distance from the boundary is $x$ be denoted by $L$. Further let us assume that $L$ is

roughly represented by the following equation

$$L - L_0 = (L_m - L_0)(1 - e^{-\frac{\alpha}{x}}) \qquad \text{.....(7)},$$

where $\alpha$ is a certain constant. This relation is represented by a curve as shown in Fig. 3.

Fig. 3




In elongating a specimen composed of many crystals, the middle parts of the crystals will be at first deformed by slipping. Thus if we take $x$ as the distance from the boundary to the middle of the crystal, then $x$ may be considered to be a measure of the linear size of the crystal. Accordingly $\frac{1}{x}$ is proportional to $Z$, the grain number per unit length of the crystal. Therefore equation (7) may be written as follows:

$$L - L_0 = (L_m - L_0)(1 - e^{-CZ}) \qquad \text{.....(8)},$$

where $C$ is a certain constant.

If we neglect $L_0$ in comparison with $L$ and $L_m$, we have

$$L = L_m(1 - e^{-CZ}).$$

Fig. 4 (a)

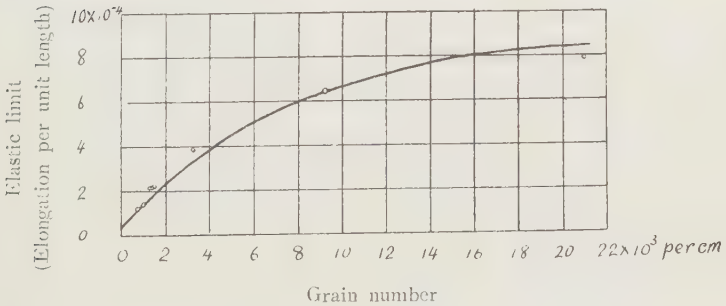
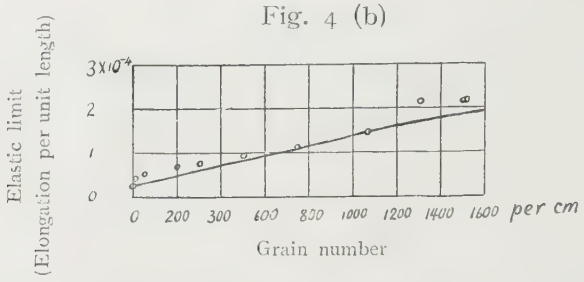


Fig. 4 (b)




This is the empirical formula obtained by the writer[1] previously. When $L_0$ is not neglected, the formula (8) is transformed as follows:

$$L = L_m - (L_m - L_0)e^{-cz} \qquad \text{.....(9).}$$

By taking $L_m = 0.00089$ and $L_0 = 0.000025$ as the values of the elastic limit at the crystal boundary and in a single crystal of aluminium respectively, and by taking $C = 0.00014$, the relation given by this formula is represented by the curves in Figs. 4a and 4b. In these figures, small circles denote the observed values. As is seen in these figures, the agreement between the calculation and the observation is satisfactory; and the disagreement in the case of a smaller grain number observed in the former research[2] is almost removed by the new formula given by (9).

In conclusion, the writer wishes to express his sincere thanks to Prof. U. Yoshida for his kind guidance in the research.

---

1. These Memoirs, A. **20**, 27 (1937).
2. These Memoirs, A. **20**, 173 (1937).

# Examination of Thin Rubber Films by Electron Diffraction

By Kenzo Tanaka

(Received Aug. 8, 1938)

**Abstract**

The molecular structure of thin rubber film deposited from its benzene solution on a polished metal surface by evaporating the solvent benzene was examined by the method of electron diffraction at various temperatures, and it was found that rubber molecules arranged themselves similarly to those of paraffin crystal.

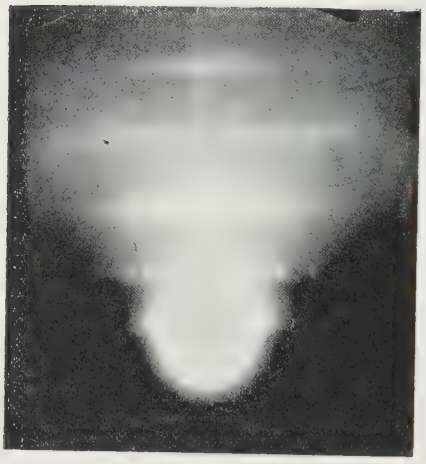
It was reported in a preceding paper[1] that when a thin film of some organic long-chain molecules coating a polished metal surface is heated, the regular arrangement of the molecules of each substance becomes haphazard at a certain temperature which is characteristic of the substance and differs from its melting point. This temperature was called the transition-temperature of the molecular arrangement of the substance. In the present experiment the manner of the arrangement of the rubber molecules in a thin film deposited from its benzene solution on a polished metal surface was examined in the same manner as before.

To obtain rubber films of different thickness a small piece of polished copper which serves as the backing of the film was dipped for a moment in a benzene solution of rubber. The range of the rubber concentration of the solution was from 2 to 0.005 per cent. By subsequent evaporation of benzene, uniform coating of rubber was obtained, which was so thin as to show the interference fringe by the light in most cases.

The typical diffraction patterns obtained by an electron beam which impinged upon the rubber film in a direction almost parallel to its surface are such as shown in Fig. 1. But these are rare cases, and generally the rubber films deposited as above stated gave rise at first to diffuse halos of amorphous structure. However when these amorphous films were heated at about 70°C for a while and cooled to room temperature they gave rise to the same diffraction patterns illustrated in Fig. 1. The regular pattern showing the regular arrangement of the rubber molecules is well defined for very thin film and becomes more diffuse

1. K. Tanaka: These Memoirs, **21**, 85 (1938).

Fig. 1



with increasing thickness of the film, as in the case of the other substances.

The regular diffraction pattern as shown in Fig. 1 is explained as being due to a certain regular arrangement of long-chain molecules standing perpendicularly to the flat surface of the backing. The spacing calculated from the separations of the parallel layer lines which are nearly straight in the figure was 2.58 Å. This spacing is the same as the distance between alternate carbon atoms in the zigzag structure of a long-chain molecule. The value of the inner potential estimated from the positions of the layer lines was less than one volt.

From the distances of the spots on the layer lines in the diffraction pattern as measured from the intersection of the plane of incidence

Table I

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Paraffin | | Rubber | | Paraffin | Al-foil |
| Indices | Spacings A | reflect. | transm. | transm. | transm. |
| 100 | 7.45 | | | | |
| 010 | 4.97 | 4.94 | | | |
| 110 | 4.13 | 4.07 | 4.07 | 4.12 | 4.15 |
| 200 | 3.72 | 3.69 | 3.69 | 3.77 | 3.72 |
| 210 | 2.98 | 2.98 | | | 2.94 |
| 020 | 2.48 | 2.50 | 2.47 | 2.47 | 2.47 |
| 120 | 2.37 | 2.37 | | | |
| 220 | 2.07 | 2.11 | | 2.075 | 2.04 |
| 400 | 1.86 | 1.79 | | | |
| 410 | 1.74 | 1.66 | | | |
| 420 | 1.49 | 1.47 | | | |
| 040 | 1.24 | | | | |
| 140 | 1.23 | 1.23 | | | |
| 240 | 1.18 | 1.11 | | | |

of the electron beam with the photographic plate, the lateral spacings of the regular arrangement of the long-chain molecules can be calculated. The spacings thus obtained are shown in the third column of Table I. In column 1 and 2 of the table the indices and the spacings of the planes parallel to $c$-axis of the crystal of paraffin found by Müller are given. The agreement between the values in column 2 and in column 3 shows that the lateral disposition of the molecules of rubber in the present case is the same as that of paraffin crystal. This arrangement of the molecules of rubber differs from that found in stretched rubber by means of X-rays.

The agreement between the structures of rubber and paraffin was also tested by transmission photographs. Rubber solution in benzene and paraffin solution in benzene were spread respectively as thin films on thin foils of aluminium which had been carefully cleaned. After the evaporation of the solvents the diffraction photographs were taken by sending the electron beam normally to the surface of the films. The results are shown respectively in columns 4 and 5 of Table I; and again the agreement is evident. Aluminium foils usually give rise to certain extra rings due to some fatty substances in the transmission photographs, such as shown in column 6 of Table I. These extra rings can be removed by carefully washing the foil; and in the examination of rubber and paraffin described above such cleaned foils were always used.

Next to see whether the regular diffraction pattern obtained with rubber may be due to some other fatty substances present in the rubber film as a contamination, diffraction photographs were taken with the backing only and with the backing which was dried after being covered thickly with benzene and volatile oil. The benzene and volatile oil were respectively the same as those used as the solvent of rubber and in cleaning the backing. But in these cases no such regular diffraction pattern as shown in Fig. 1 appeared even though the specimens were heated to about 90°C. Next, the surface of the rubber film which had given rise to the regular diffraction pattern as Fig. 1, was cleaned with volatile oil to remove any fatty substances which might be present on the surface of the rubber film as a contamination. But no appreciable change in the diffraction pattern was observed with such specimen before and after the cleaning.

By the results of these tests, the suspicion that the regular diffraction pattern observed with a thin film of rubber deposited on a

smooth surface of a metal might be caused by some fatty substances present in the film as a contamination, seems to be almost removed; and consequently the view that the rubber molecules arrange themselves in the same manner as paraffin in the present case seems to be almost certain.

When the thin rubber film in which the rubber molecules were arranged regularly as has been described, was heated in the vacuum of the electron diffraction apparatus, no appreciable change in the regular diffraction pattern was observed at a temperature below about 60°C, but with further rise of temperature the pattern became diffuse and finally vanished at about 66°C. Such transition-temperature at which the regular arrangement of the molecules becomes haphazard, was measured in the same way with ten specimens of different thickness. The transition-temperature thus measured ranged from 58°C to 66°C and no regular relation was found between the transition-temperature and the thickness of the film. This transition of the molecular arrangement of rubber from regular to irregular is reversible and when the heated specimen is cooled the molecules arrange themselves regularly as before nearly at the transition-temperature.

The writer wishes to express his sincere thanks to Prof. U. Yoshida for his invaluable suggestions.

Vol. XXI, No. 5, Published September 30, 1938

Price - - - - Yen 1.70

These Memoirs are on Sale at

MARUZEN COMPANY, LTD.
TOKYO, OSAKA, KYOTO, NAGOYA, YOKOHAMA,
FUKUOKA & SENDAI

昭和十三年九月二十五日印刷
昭和十三年九月三十日發行

編纂兼發行者　京都帝國大學理學部

印刷者　須磨勘兵衛
京都市下京區北小路通新町西

印刷所　内外出版印刷株式會社
京都市下京區西洞院通七條南

賣捌所　丸善株式會社
東京、大阪、京都、名古屋、横濱、福岡、仙臺

## CONTENTS

**Strahlungstheoretische Untersuchungen über die Stellargashülle in Bewegung**
Von Michinori Kurihara . . . . . 89
**Change of the Elastic Limit of an Aluminium Rod by Annealing**
By Miyabi Sugihara . . . . . 145
**Elastic Property of an Aluminium Rod and its Crystal Grains**
By Miyabi Sugihara . . . . . 163
**Examination of Thin Rubber Films by Electron Diffraction**
By Kenzo Tanaka . . . . . 169